Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

14. Januar 2009

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 5: Inverse Matrix, Determinanten, Analytische Geometrie

Letzter Abgabetermin: 27. Januar 2009
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 5“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 haben die Normalenvektoren $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, sie schneiden die x-Achse für $x=a$, $x=b$ bzw. $x=c$. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Algorithmus die Matrix $\boldsymbol{A}$ so, dass die Koordinaten des Schnittpunkts (x,y,z) der 3 Ebenen durch $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ berechnet werden!

2. Berechnen Sie durch Entwicklung die Determinante $\begin{vmatrix}5&0&0&1&5&4\\7&3&a&b&c&d\\0&0&0&2&4&0\\5&0&b&1&2&c\\0&0&0&3&d&0\\a&0&0&1&5&4\end{vmatrix}$!

   Für welche Werte der Parameter a, b, c und d verschwindet die Determinante?

3. Gegeben seien die Punkte $A(1,1,6)$, $B(2,1,3)$, $C(3,2,5)$ und $P(8,-17,0)$.
   a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Parameterform und in parameterfreier Form!
   b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden der Ebene E mit den Koordinatenebenen!
   c) Bestimmen Sie die Schnittwinkel der Ebene E mit den Koordinatenachsen und -ebenen!
   d) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes vom Punkt P auf die Ebene E und den Lotfußpunkt!
   e) Wie groß ist der Abstand des Punktes P von der Ebene E?

4. Bestimmen Sie den Abstand der Gerade durch die Punkte $(15,-3,-14)$ und $(17,-2,-16)$ von den drei im Folgenden genannten Geraden! In welchen Punkten der Geraden wird der Abstand realisiert?
   a) Gerade $z=-x+1$ in der x-z-Ebene,
   b) x-Achse,
   c) Schnittgerade der Ebenen $x=2y$ und $z=-2y$.

5. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der orthogonalen Projektion des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ und $C(24,16,14)$ in die Ebene $3x+2y+z=6$!

Zusatzaufgabe auf Seite 2

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (vgl. Hausaufgabe 5, Aufgabe 1). Bestimmen Sie die inverse Matrix von A.
2. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix aus Aufgabe 2 für
   a) $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$
   b) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 2$
   c) $a = -2, b = 0, c = 2, d = 4$
   d) $a = 6, b = 4, c = 4, d = 6$.
3. Zeichnen Sie die Kanten des von den drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ aufgespannten Parallelepipedes. Versuchen Sie, die Ansicht so zu wählen, dass die Orthogonalität von $\vec{a}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ und von $\vec{b}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ zu erkennen ist.
4. a) Stellen Sie die Ebene aus Aufgabe 5, die drei gegebenen Punkte A, B, C sowie das von diesen erzeugte Dreieck in einem Plot geeignet dar.
   b) Projizieren Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ in die Ebene (d.h., berechenen Sie die zum Normalenvektor senkrechte Komponente). Zeichnen Sie die projizierten Vektoren in die Ebene ein (angesetzt am Punkt A bzw. B).
   c) Berechnen Sie den Lotfußpunkt von C bzgl. der gegebenen Ebene. Zeichnen Sie den Lotfußpunkt und die Strecke vom Punkt zum Lotfußpunkt. Berechnen Sie auch den Abstand des Punktes zur Ebene.
   d) Bestimmen Sie den in Aufgabe 5 gefragten Flächeninhalt.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur `MATLAB`aufgabe

Inverse Matrix, Determinante und Kreuzprodukt

In `MATLAB` kann die inverse Matrix mit dem Befehl `inv` und die Determinante mit dem Befehl `det` berechnet werden. Beispiel:

```
≫ A=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
≫ inv(A)
≫ det(A)
```

Für die Überprüfung von händisch ausgerechneten inversen Matrizen mit `MATLAB` ist es oft günstig, zusätzlich

```
≫ det(A)*inv(A)
```

zu berechnen.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren lässt sich mit dem Befehl `cross` und das Skalarprodukt mit dem Befehl `dot` bestimmen. Beispiel:

```
≫ cross([1; -1; 2], [-4; 2; 0])
≫ dot([1; -1; 2], [-4; 2; 0])
```

Darstellen von Punkten

Ein einzelner Punkt im Raum kann durch einen einfachen `plot3`-Befehl dargestellt werden. Beispielsweise wird durch

```
≫ plot3(1,1,1)
```

der Punkt mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gezeichnet. Die Darstellung lässt sich durch

```
≫ plot3(1,1,1,'Marker','.','MarkerSize',20,'Color','red')
≫ grid on
```

verdeutlichen.

Aufgabenkomplex 5: Inverse Matrix, Determinanten, Analytische Geometrie

Letzter Abgabetermin: 27. Januar 2009

---

1. Die Ebenen E_1, E_2 und E_3 haben die Normalenvektoren $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, sie schneiden die x-Achse für $x=a$, $x=b$ bzw. $x=c$. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Algorithmus die Matrix $\boldsymbol{A}$ so, dass die Koordinaten des Schnittpunkts (x,y,z) der 3 Ebenen durch $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ berechnet werden!

Lösung:

Da die Ebenen E_1, E_2 und E_3 die Punkte $(a,0,0)$, $(b,0,0)$ bzw. $(c,0,0)$ enthalten, lauten ihre Gleichungen $x+3y+2z=a$, $x-y+2z=b$ bzw. $x+2y-z=c$. Der Schnittpunkt der 3 Ebenen wird also durch Lösung des Gleichungssystems $\begin{pmatrix}1&3&2\\1&-1&2\\1&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ bestimmt. Dessen Koeffizientenmatrix muss somit invertiert werden:

$$
\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\
1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1\\ \hline
1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\
0 & -4 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1\\ \hline
1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \frac14 & -\frac14 & 0\\
0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1\\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \frac14 & -\frac14 & 0\\
0 & 0 & -3 & -\frac34 & -\frac14 & 1\\ \hline
1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & \frac14 & -\frac14 & 0\\
0 & 0 & 1 & \frac14 & \frac1{12} & -\frac13\\ \hline
1 & 3 & 0 & \frac12 & -\frac16 & \frac23\\
0 & 1 & 0 & \frac14 & -\frac14 & 0\\
0 & 0 & 1 & \frac14 & \frac1{12} & -\frac13\\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrr|rrr}
1 & 0 & 0 & -\frac14 & \frac7{12} & \frac23\\
0 & 1 & 0 & \frac14 & -\frac14 & 0\\
0 & 0 & 1 & \frac14 & \frac1{12} & -\frac13
\end{array}
$$

Also gilt $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-\frac14 & \frac7{12} & \frac23\\ \frac14 & -\frac14 & 0\\ \frac14 & \frac1{12} & -\frac13\end{pmatrix}=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix}-3 & 7 & 8\\ 3 & -3 & 0\\ 3 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

---

2. Berechnen Sie durch Entwicklung die Determinante $\begin{vmatrix}5&0&0&1&5&4\\7&3&a&b&c&d\\0&0&0&2&4&0\\5&0&b&1&2&c\\0&0&0&3&d&0\\a&0&0&1&5&4\end{vmatrix}$!

Für welche Werte der Parameter a, b, c und d verschwindet die Determinante?

Lösung:

$$
\begin{vmatrix}5&\mathbf{0}&0&1&5&4\\7&\mathbf{3}&a&b&c&d\\0&\mathbf{0}&0&2&4&0\\5&\mathbf{0}&b&1&2&c\\0&\mathbf{0}&0&3&d&0\\a&\mathbf{0}&0&1&5&4\end{vmatrix}
=3\begin{vmatrix}5&\mathbf{0}&1&5&4\\0&\mathbf{0}&2&4&0\\5&\boldsymbol{b}&1&2&c\\0&\mathbf{0}&3&d&0\\a&\mathbf{0}&1&5&4\end{vmatrix}
=-3b\begin{vmatrix}\mathbf{5}&1&5&4\\\mathbf{0}&2&4&0\\\mathbf{0}&3&d&0\\\boldsymbol{a}&1&5&4\end{vmatrix}=
$$

$$= -3b\left(5\begin{vmatrix}1&5&\mathbf{4}\\2&4&\mathbf{0}\\3&d&\mathbf{0}\end{vmatrix} - a\begin{vmatrix}2&4&\mathbf{0}\\3&d&\mathbf{0}\\1&5&\mathbf{4}\end{vmatrix}\right) = -3b\left(5\cdot 4\begin{vmatrix}2&4\\3&d\end{vmatrix} - a\cdot 4\begin{vmatrix}2&4\\3&d\end{vmatrix}\right)$$

$$= -12b(5-a)(2d-12) = \underline{\underline{24\,b(a-5)(d-6)}}$$

Offensichtlich verschwindet die Determinante genau dann, wenn $a=5$, $b=0$ oder $d=6$ ist.

---

3. Gegeben seien die Punkte $A(1,1,6)$, $B(2,1,3)$, $C(3,2,5)$ und $P(8,-17,0)$.

a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Parameterform und in parameterfreier Form!

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden der Ebene E mit den Koordinatenebenen!

c) Bestimmen Sie die Schnittwinkel der Ebene E mit den Koordinatenachsen und -ebenen!

d) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes vom Punkt P auf die Ebene E und den Lotfußpunkt!

e) Wie groß ist der Abstand des Punktes P von der Ebene E?

Lösung:

a) Richtungen in der Ebene z.B. $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Parameterform der Ebenengleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&0&-3\\2&1&-1\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-6\end{pmatrix} = 3x-3-5y+5+z-6 = 0$$

parameterfreie Form der Ebenengleichung: $3x-5y+z=4$

b) x-Achse: $y=z=0$, also Schnitt für $3x=4$, $x=\frac{4}{3}$, Schnittpunkt $\left(\frac{4}{3},0,0\right)$

y-Achse: $x=z=0$, also Schnitt für $-5y=4$, $y=-\frac{4}{5}$, Schnittpunkt $\left(0,-\frac{4}{5},0\right)$

z-Achse: $x=y=0$, also Schnitt für $z=4$, Schnittpunkt $(0,0,4)$

x-y-Ebene: $z=0$, also Schnitt für $3x-5y=4$, $z=0$, $\quad x=\frac{4}{3}+\frac{5}{3}y$, $z=0$,

d.h. Schnittgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$

x-z-Ebene: $y=0$, also Schnitt für $3x+z=4$, $y=0$, $\quad z=4-3x$, $y=0$,

d.h. Schnittgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\-3\end{pmatrix}$

y-z-Ebene: $x=0$, also Schnitt für $-5y+z=4,\ x=0,\quad z=4+5y,\ x=0,$
d.h. Schnittgerade $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}$

c) Die Ebenen schneiden sich im gleichen Winkel wie ihre (jeweils zu den Ebenen orthogonalen) Stellungsvektoren, also ergibt sich

Schnittwinkel von E mit x-y-Ebene: $\arccos\dfrac{\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{35}}\approx 80.27^\circ$

(Es ist nicht gesagt, welcher der beiden Schnittwinkel der Ebenen angegeben werden soll, also kann auch 99.73° angegeben werden.),

Schnittwinkel von E mit x-z-Ebene: $\arccos\dfrac{\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|}=\arccos\dfrac{-5}{\sqrt{35}}\approx 147.69^\circ \mathrel{\hat{=}} 32.31^\circ,$

Schnittwinkel von E mit y-z-Ebene: $\arccos\dfrac{\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\right\|\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|}=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{35}}\approx 59.53^\circ.$

Die Stellungsvektoren der Koordinatenebenen sind auch die Richtungsvektoren der Koordinatenachsen, also ergeben sich als Schnittwinkel mit den Koordinatenachsen die zu 90° komplementären der eben ausgerechneten Winkel, d.h. mit der z–Achse 9.73°, mit der y–Achse 57.69° und mit der x–Achse 30.47°.

d) Auf $3x-5y+z=4$ steht $\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$ senkrecht, d.h. Lot ist $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-17\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$.

Im Lotfußpunkt gilt $3(8+3t)-5(-17-5t)+t=4,$
$109+35t=4,\quad 35t=-105,\quad t=-3,$ also ist
$\begin{pmatrix}8\\-17\\0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ Lotfußpunkt.

e) Abstand = Länge des Lotes: $\left\|\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\-17\\0\end{pmatrix}\right\|=\left\|-3\begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}\right\|=3\sqrt{35}\approx 17.75$

4. Bestimmen Sie den Abstand der Gerade durch die Punkte $(15,-3,-14)$ und $(17,-2,-16)$ von den drei im Folgenden genannten Geraden! In welchen Punkten der Geraden wird der Abstand realisiert?

a) Gerade $z=-x+1$ in der x-z-Ebene,
b) x-Achse,
c) Schnittgerade der Ebenen $x=2y$ und $z=-2y$.

Lösung:

Die Gerade g durch die Punkte $(15,-3,-14)$ und $(17,-2,-16)$ hat die Gleichung

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}15\\-3\\-14\end{pmatrix}+s\left(\begin{pmatrix}17\\-2\\-16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15\\-3\\-14\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}15\\-3\\-14\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

a) Die bei a) gegebene Gerade h_a liegt in der x-z-Ebene, also ist $y=0$. Wählt man $t=x$ als Parameter, so ist $z=-t+1$, die Geradengleichung lautet also $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Die Geraden g und h_a sind offensichtlich nicht parallel, ihr gemeinsames Lot hat die Richtung

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-2\\1&0&-1\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Abstand ist die Länge der Projektion eines beliebigen Verbindungsvektors der beiden Geraden, also z.B. von $\begin{pmatrix}15\\-3\\-14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-3\\-15\end{pmatrix}$ auf die Richtung des gemeinsamen Lotes. Die Projektion des angegebenen Vektors ist

$$\frac{\begin{pmatrix}15\\-3\\-15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Also ist der Abstand 0, die Geraden g und h_a schneiden sich. Der Abstand 0 wird im Schnittpunkt realisiert:

$$\begin{aligned}15+2s&=t && \Longrightarrow t=21\\-3+s&=0 && \Longrightarrow s=3\\-14-2s&=1-t && -14-2\cdot 3=1-21,\ \text{stimmt.}\end{aligned}$$

Ortsvektor des Schnittpunkts ist somit $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+21\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\0\\-20\end{pmatrix}$.

b) Die x-Achse hat die Gleichung $\vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. Auch sie ist offensichtlich nicht parallel zu g, das gemeinsame Lot hat die Richtung $\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&1&-2\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

Abstand ist dann die Länge der Projektion z.B. von $\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix}$ auf die Richtung des gemeinsamen Lotes. Diese Projektion ist $\dfrac{\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{-20}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Abstand beträgt somit $\left\| -4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = 4\sqrt{5} \approx 8.94$, die Geraden sind windschief.

Sind s und t die Parameter der Lotfußpunkte in den Geradengleichungen, so gilt

$$\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

s und t ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems $\begin{aligned} 2s - t &= -15 \\ s &= -5 \\ -2s &= 10 \end{aligned}$ zu $s=-5$ und $t=5$.

Der Abstand wird also in den Punkten $\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ auf g und $5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf der x-Achse realisiert.

c) Da auf der Gerade h_c die Gleichungen $x=2y$ und $z=-2y$ gleichzeitig erfüllt sind, erhält man mit dem Parameter $t=y$ als Geradengleichung $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Geraden h_c und g sind somit parallel. Ihr Abstand ist die Länge des Lotes von einem beliebigen Punkt der Gerade h_c, also z.B. vom Koordinatenursprung, auf die Gerade g. Den Lotfußpunkt kann man bestimmen, indem man den Verbindungsvektor zwischen einem Punkt auf g, z.B. $(15,-3,-14)$, und dem Koordinatenursprung auf g projiziert:

$$\frac{\begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{-55}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Fußpunkt des Lotes vom Koordinatenursprung auf g ist also $\begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -14 \end{pmatrix} - \dfrac{55}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/9 \\ -82/9 \\ -16/9 \end{pmatrix}$.

Da es sich um das Lot vom Koordinatenursprung handelt ist der Ortsvektor des Lotfußpunktes zugleich das Lot. Der Abstand beträgt somit $\left\| \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 25 \\ -82 \\ -16 \end{pmatrix} \right\| = \dfrac{\sqrt{7605}}{9} = \dfrac{\sqrt{845}}{3} \approx 9.69$.

Realisiert wird der Abstand in jedem Paar von Punkten $t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in h_c,\ t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25/9 \\ -82/9 \\ -16/9 \end{pmatrix} \in g$.

5. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der orthogonalen Projektion des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ und $C(24,16,14)$ in die Ebene $3x+2y+z=6$!

Lösung:

Da der Flächeninhalt des Dreiecks die Hälfte des Betrages des Kreuzproduktes von zwei seiner Seitenvektoren ist, reicht es, zwei Seitenvektoren des gegebenen Dreiecks in die Ebene $3x+2y+z=6$ zu projizieren.

Hierzu werden die Vektoren zunächst auf die Richtung des Normalenvektor der Ebene projiziert, die Differenz zwischen dem Vektor und seiner Projektion auf die Normalenrichtung ist seine Projektion in die Ebene.

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$: Projektion auf Normalenrichtung $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$: $\dfrac{\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\vec{0}$,

also liegt der Seitenvektor $\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ in der Ebene $3x+2y+z=6$.

$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}24\\16\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\\16\\14\end{pmatrix}$:

Projektion auf Normalenrichtung $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$: $\dfrac{\begin{pmatrix}22\\16\\14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\dfrac{112}{14}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\16\\8\end{pmatrix}$,

Projektion in die Ebene $3x+2y+z=6$: $\begin{pmatrix}22\\16\\14\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}24\\16\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}$.

$$F=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\0\\6\end{pmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&3&0\\-2&0&6\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix}18\\12\\6\end{pmatrix}\right\|=3\left\|\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\|=3\sqrt{14}\approx\underline{\underline{11.22}}.$$

(Man kann auch zunächst die gegebenen Punkte in die Ebene $3x+2y+z=6$ projizieren. Die Punkte $(2,0,0)$ und $(0,3,0)$ liegen offensichtlich bereits in der Ebene, für $(24,16,14)$ lautet die Geradengleichung des Lots $\vec{x}=\begin{pmatrix}24\\16\\14\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$. Das Einsetzen in die Ebenengleichung liefert $t=-8$ als Parameter für den Lotfußpunkt, dieser ist also $(0,0,6)$. Also ist der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten $(2,0,0)$, $(0,3,0)$ und $(0,0,6)$ zu bestimmen, siehe oben.)

Zusatzaufgabe

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (vgl. Hausaufgabe 5, Aufgabe 1). Bestimmen Sie die inverse Matrix von A.
2. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix aus Aufgabe 2 für
   a) $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$
   b) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 2$
   c) $a = -2, b = 0, c = 2, d = 4$
   d) $a = 6, b = 4, c = 4, d = 6$.
3. Zeichnen Sie die Kanten des von den drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ aufgespannten Parallelepipedes. Versuchen Sie, die Ansicht so zu wählen, dass die Orthogonalität von $\vec{a}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ und von $\vec{b}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ zu erkennen ist.
4. a) Stellen Sie die Ebene aus Aufgabe 5, die drei gegebenen Punkte A, B, C sowie das von diesen erzeugte Dreieck in einem Plot geeignet dar.
   b) Projizieren Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ in die Ebene (d.h., berechenen Sie die zum Normalenvektor senkrechte Komponente). Zeichnen Sie die projizierten Vektoren in die Ebene ein (angesetzt am Punkt A bzw. B).
   c) Berechnen Sie den Lotfußpunkt von C bzgl. der gegebenen Ebene. Zeichnen Sie den Lotfußpunkt und die Strecke vom Punkt zum Lotfußpunkt. Berechnen Sie auch den Abstand des Punktes zur Ebene.
   d) Bestimmen Sie den in Aufgabe 5 gefragten Flächeninhalt.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Lösung:

nachbereitete `diary`-Datei (Kommentare durch `%` gekennzeichnet) und Plots auf den nächsten Seiten

```
% --------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 1
% --------------------------------------------------------------------------

% Matrix aufstellen
A=[1 3 2; 1 -1 2; 1 2 -1]
A =
     1     3     2
     1    -1     2
     1     2    -1

% Matrix invertieren
inv(A)
ans =
   -0.2500    0.5833    0.6667
    0.2500   -0.2500         0
    0.2500    0.0833   -0.3333

% Vergleich mit dem von Hand errechneten Ergebnis
det(A)
ans =
    12

det(A)*inv(A)
ans =
    -3     7     8
     3    -3     0
     3     1    -4


% --------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 2
% --------------------------------------------------------------------------

a=[1, 5, -2, 6];
b=[1, 4, 0, 4];
c=[1, 3, 2, 4];
d=[1, 2, 4, 6];

for i=1:4
    % Matrix aufstellen
    B=[ 5   0   0    1    5    4;
        7   3  a(i) b(i) c(i) d(i);
        0   0   0    2    4    0;
        5   0  b(i)  1    2   c(i);
        0   0   0    3   d(i)  0;
      a(i)  0   0    1    5    4]
    % Determinante berechnen
    Determinante=det(B)
end;

B =
     5     0     0     1     5     4
     7     3     1     1     1     1
     0     0     0     2     4     0
     5     0     1     1     2     1
     0     0     0     3     1     0
     1     0     0     1     5     4
Determinante =
   480

B =
     5     0     0     1     5     4
     7     3     5     4     3     2
     0     0     0     2     4     0
     5     0     4     1     2     3
     0     0     0     3     2     0
     5     0     0     1     5     4
Determinante =
     0

B =
     5     0     0     1     5     4
     7     3    -2     0     2     4
     0     0     0     2     4     0
     5     0     0     1     2     2
     0     0     0     3     4     0
    -2     0     0     1     5     4
Determinante =
     0

B =
     5     0     0     1     5     4
     7     3     6     4     4     6
     0     0     0     2     4     0
     5     0     4     1     2     4
     0     0     0     3     6     0
     6     0     0     1     5     4
Determinante =
     0


% --------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 3
% --------------------------------------------------------------------------

% Vektoren aufstellen

a=[1; 0; -3]
a =
     1
     0
    -3
b=[2; 1; -1]

b =
     2
     1
    -1

% Kreuzprodukt berechnen
c=cross(a,b)
c =
     3
    -5
     1

% Vektoren zeichnen
figure;
hold on;
```

```
% Mit p=..; q=..; plot3( [p(1), q(1)] , [p(2), q(2)] , [p(3), q(3)] )
% wird die Verbindungsstrecke vom Punkt p zum Punkt q gezeichnet.
% Dies wird jetzt für alle 12 Kanten ausgeführt:

% "unteres" (i=0) und "oberes" (i=1) Parallelogramm
for i=0:1
    p=i*c; q=i*c+a; plot3( [p(1), q(1)] , [p(2), q(2)] , [p(3), q(3)] )
    p=i*c+a; q=i*c+a+b; plot3( [p(1), q(1)] , [p(2), q(2)] , [p(3), q(3)] )
    p=i*c+a+b; q=i*c+b; plot3( [p(1), q(1)] , [p(2), q(2)] , [p(3), q(3)] )
    p=i*c+b; q=i*c; plot3( [p(1), q(1)] , [p(2), q(2)] , [p(3), q(3)] )
end;

% senkrechte Verbindung zwischen "unterem" und "oberem" Parallelogramm
% (zur Verdeutlichung fett gezeichnet)
O=[0 0 0];
p=O; q=c; plot3( [p(1),q(1)],[p(2),q(2)],[p(3),q(3)], 'LineWidth',2 )
p=a; q=c+a; plot3( [p(1),q(1)],[p(2),q(2)],[p(3),q(3)], 'LineWidth',2 )
p=a+b; q=c+a+b; plot3( [p(1),q(1)],[p(2),q(2)],[p(3),q(3)], 'LineWidth',2 )
p=b; q=c+b; plot3( [p(1),q(1)],[p(2),q(2)],[p(3),q(3)], 'LineWidth',2 )

% Achsen beschriften
xlabel('x_1')
ylabel('x_2')
zlabel('x_3')

% ggf. von Hand in gewünschte Lage drehen,
% mit der folgenden Anweisung wird Betrachterstandpunkt vorgegeben:
view(-50,50)

% Titel setzen
viewparam=get(gca(),'view');
title(['Darstellung des von den Vektoren a, b und a x b aufgespannten
Paralellepipedes mit view(',num2str(viewparam(1)),',',num2str(viewparam(2)),
')']);

print -depsc ak5_zusatz_3.eps
```

```
% -------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 4
% -------------------------------------------------------------------------

% a) ---------------------------------------------------------------------

% Punkte eingeben
A=[2; 0; 0]
A =
     2
     0
     0
B=[0; 3; 0]
B =
     0
     3
     0
C=[24; 16; 14]
C =
    24
    16
    14

% Normalenvektor der Ebene eingeben
n=[3; 2; 1]
n =
     3
     2
     1

figure; hold on;
% Zeichne Ebene 3x+2y+z=6 durch Punkte [6 -3 -6], [-2 9 -6] und [-2 -3 18]
patch([6 -2 -2],[-3 9 -3],[-6 -6 18],[1 0 0],'FaceAlpha',0.5);
%
% Dieser Befehl funktioniert unter Octave-3.0.1 mit Jhandle nicht korrekt.
% Statt dessen sollte dort der Befehl
%
% patch([6 -2 -2],[-3 9 -3],[-6 -6 18], 'cdata', reshape([1 0 0],1,1,3),
% 'FaceColor', 'flat', 'FaceAlpha',0.5);
%
% verwendet werden.
%

% Achsen beschriften
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')

% Zeichne Punkte A, B, C ein
plot3(A(1),A(2),A(3),'Marker','.','MarkerSize',20,'Color','blue')
plot3(B(1),B(2),B(3),'Marker','.','MarkerSize',20,'Color','blue')
plot3(C(1),C(2),C(3),'Marker','.','MarkerSize',20,'Color','blue')

% Stelle das Dreieck durch Zeichnen der Verbindungsstrecken dar
p=A; q=B;
plot3([p(1),q(1)], [p(2),q(2)], [p(3),q(3)], 'LineWidth',2,'Color','blue')
p=A; q=C;
plot3([p(1),q(1)], [p(2),q(2)], [p(3),q(3)], 'LineWidth',2,'Color','blue')
p=C; q=B;
plot3([p(1),q(1)], [p(2),q(2)], [p(3),q(3)], 'LineWidth',2,'Color','blue')
```

```
% b) ---------------------------------------------------------------------

% Projiziere AC in die Ebene (verwende Formel aus der Vorlesung)
Proj_AC = 1/norm(n)^2*cross(n,cross(C-A,n))
Proj_AC =
    -2
     0
     6

% Zeichne Projektion in die Ebene ein
p=A; q=A+Proj_AC;
plot3([p(1),q(1)], [p(2),q(2)], [p(3),q(3)], 'LineWidth',2,'Color','green')

% Projiziere BC in die Ebene (verwende Formel aus der Vorlesung)
Proj_BC = 1/norm(n)^2*cross(n,cross(C-B,n))
Proj_BC =
     0
    -3
     6

% Zeichne Projektion in die Ebene ein
p=B; q=B+Proj_BC;
plot3([p(1),q(1)], [p(2),q(2)], [p(3),q(3)], 'LineWidth',2,'Color','green')

% c) ---------------------------------------------------------------------

% Berechne den  Lotfußpunkt
PC=C+1/norm(n)^2*dot(A-C,n)*n;
% (Es gilt PC = A+Proj_AC = B+Proj_BC .)

% Zeichne Lotfußpunkt PC ein
plot3(PC(1),PC(2),PC(3),'Color','g',
      'Marker','.','MarkerSize',20,'Color','red')

% Zeichne Verbindungsstrecke
p=C; q=PC;
plot3([p(1),q(1)], [p(2),q(2)], [p(3),q(3)], 'LineWidth',2,'Color','red')

% Berechne Abstand
norm(C-PC)
ans =
   29.9333

% ggf. von Hand in gewünschte Lage drehen,
% mit der folgenden Anweisung wird Betrachterstandpunkt vorgegeben:
view(-51.3,56)

% Titel setzen
viewparam=get(gca(),'view');
title(['Projektion des blauen auf das grüne Dreieck, Darstellung mit view(',
num2str(viewparam(1)),',',num2str(viewparam(2)),')']);

print -depsc ak5_zusatz_4.eps

% d) ---------------------------------------------------------------------

% Berechne Flächeninhalt des projizierten Dreiecks
Flaecheninhalt=1/2*norm(cross(A-PC, B-PC))
Flaecheninhalt =
   11.2250
```