**Technische Universität Chemnitz**
Fakultät für Mathematik

14. Januar 2009

**Höhere Mathematik I.1**

# Aufgabenkomplex 5: Inverse Matrix, Determinanten, Analytische Geometrie

**Letzter Abgabetermin: 27. Januar 2009**
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)
**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 5“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

1. Die Ebenen $E_1$, $E_2$ und $E_3$ haben die Normalenvektoren $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, sie schneiden die $x$-Achse für $x=a$, $x=b$ bzw. $x=c$. Bestimmen Sie mithilfe des Gaußschen Algorithmus die Matrix $\boldsymbol{A}$ so, dass die Koordinaten des Schnittpunkts $(x,y,z)$ der 3 Ebenen durch $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ berechnet werden!

2. Berechnen Sie durch Entwicklung die Determinante $\begin{vmatrix}5&0&0&1&5&4\\7&3&a&b&c&d\\0&0&0&2&4&0\\5&0&b&1&2&c\\0&0&0&3&d&0\\a&0&0&1&5&4\end{vmatrix}$ !

   Für welche Werte der Parameter $a$, $b$, $c$ und $d$ verschwindet die Determinante?

3. Gegeben seien die Punkte $A(1,1,6)$, $B(2,1,3)$, $C(3,2,5)$ und $P(8,-17,0)$.
   a) Ermitteln Sie die Gleichung der Ebene $E$ durch die Punkte $A$, $B$ und $C$ in Parameterform und in parameterfreier Form!
   b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Ebene $E$ mit den Koordinatenachsen und die Schnittgeraden der Ebene $E$ mit den Koordinatenebenen!
   c) Bestimmen Sie die Schnittwinkel der Ebene $E$ mit den Koordinatenachsen und -ebenen!
   d) Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes vom Punkt $P$ auf die Ebene $E$ und den Lotfußpunkt!
   e) Wie groß ist der Abstand des Punktes $P$ von der Ebene $E$?

4. Bestimmen Sie den Abstand der Gerade durch die Punkte $(15,-3,-14)$ und $(17,-2,-16)$ von den drei im Folgenden genannten Geraden! In welchen Punkten der Geraden wird der Abstand realisiert?
   a) Gerade $z=-x+1$ in der $x$-$z$-Ebene,
   b) $x$-Achse,
   c) Schnittgerade der Ebenen $x=2y$ und $z=-2y$.

5. Bestimmen Sie den Flächeninhalt der orthogonalen Projektion des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(2,0,0)$, $B(0,3,0)$ und $C(24,16,14)$ in die Ebene $3x+2y+z=6$ !

**Zusatzaufgabe auf Seite 2**

## Zusatzaufgabe

**Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (vgl. Hausaufgabe 5, Aufgabe 1). Bestimmen Sie die inverse Matrix von $A$.
2. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix aus Aufgabe 2 für
   a) $a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$
   b) $a = 5, b = 4, c = 3, d = 2$
   c) $a = -2, b = 0, c = 2, d = 4$
   d) $a = 6, b = 4, c = 4, d = 6$.
3. Zeichnen Sie die Kanten des von den drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ aufgespannten Parallelepipedes. Versuchen Sie, die Ansicht so zu wählen, dass die Orthogonalität von $\vec{a}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ und von $\vec{b}$ zu $\vec{a} \times \vec{b}$ zu erkennen ist.
4. a) Stellen Sie die Ebene aus Aufgabe 5, die drei gegebenen Punkte $A, B, C$ sowie das von diesen erzeugte Dreieck in einem Plot geeignet dar.
   b) Projizieren Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ in die Ebene (d.h., berechenen Sie die zum Normalenvektor senkrechte Komponente). Zeichnen Sie die projizierten Vektoren in die Ebene ein (angesetzt am Punkt $A$ bzw. $B$).
   c) Berechnen Sie den Lotfußpunkt von $C$ bzgl. der gegebenen Ebene. Zeichnen Sie den Lotfußpunkt und die Strecke vom Punkt zum Lotfußpunkt. Berechnen Sie auch den Abstand des Punktes zur Ebene.
   d) Bestimmen Sie den in Aufgabe 5 gefragten Flächeninhalt.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

## Hinweise zur `MATLAB`aufgabe

### Inverse Matrix, Determinante und Kreuzprodukt

In `MATLAB` kann die inverse Matrix mit dem Befehl `inv` und die Determinante mit dem Befehl `det` berechnet werden. Beispiel:

```
≫ A=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
≫ inv(A)
≫ det(A)
```

Für die Überprüfung von händisch ausgerechneten inversen Matrizen mit `MATLAB` ist es oft günstig, zusätzlich

```
≫ det(A)*inv(A)
```

zu berechnen.

Das Kreuzprodukt zweier Vektoren lässt sich mit dem Befehl `cross` und das Skalarprodukt mit dem Befehl `dot` bestimmen. Beispiel:

```
≫ cross([1; -1; 2], [-4; 2; 0])
≫ dot([1; -1; 2], [-4; 2; 0])
```

### Darstellen von Punkten

Ein einzelner Punkt im Raum kann durch einen einfachen `plot3`-Befehl dargestellt werden. Beispielsweise wird durch

```
≫ plot3(1,1,1)
```

der Punkt mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gezeichnet. Die Darstellung lässt sich durch

```
≫ plot3(1,1,1,'Marker','.','MarkerSize',20,'Color','red')
≫ grid on
```

verdeutlichen.