

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 4: Lineare Gleichungssysteme

Letzter Abgabetermin: 08. Januar 2009

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem $x - 2y + 3z = 4$ in
 $4x + 3y - 10z = 5$
 $5x - 3y + az = b$

Abhängigkeit von den Parametern a und b !

Geben Sie jeweils auch den Rang der Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

2. Für welche Werte von a sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ a \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Stellen Sie in diesem Falle den dritten Vektor als Linearkombination der beiden anderen dar!

3. a) Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -8 \\x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 5 \\x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= b \quad \text{an!}\end{aligned}$$

b) Für welche Werte des Parameters b ist das Gleichungssystem lösbar?

c) Berechnen Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!

4. In einer Mensa werden die Essen A, B und C (damit sich hier mit einfachen Zahlen rechnen lässt) an Studenten zum Preis von 1, 2 bzw. 3 € und an Mitarbeiter zum Preis von 2, 4 bzw. 5 € abgegeben. An einem Tag werden 3000 Essenportionen verkauft und ein Umsatz von 7100 € erzielt. Dabei werden an Studenten insgesamt fünfmal so viele Portionen ausgegeben wie an Mitarbeiter. Der Wareneinsatz beträgt bei dem Essen A 1 € sowie bei den Essen B und C 1,50 € pro Portion und insgesamt an diesem Tag 4150 €. Der Personalaufwand beträgt bei den Essen A und B 1,50 € sowie beim Essen C 2 € pro Person und insgesamt an diesem Tag 4950 €.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Zahl der an Studenten bzw. Mitarbeiter abgegebenen Portionen der einzelnen Essen auf!

b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!

c) Wie viele verschiedene Lösungen für den beschriebenen Sachverhalt gibt es?

5. a) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller Polynome höchstens fünften Grades $P_5(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$, die an den Stellen $x = -2, -1, 0, 1$ und 2 in dieser Reihenfolge die Werte 74, 12, 4, 2 und -18 annehmen!

b) Welches Polynom vierten Grades hat die beschriebenen Eigenschaften?

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(vgl. Übung 9, Aufgabe 1 a) und Hausaufgabe 4, Aufgabe 2).

- a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A .
 - b) Finden Sie mithilfe der `rank`-Funktion heraus, ob die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind und welche Dimension ihre lineare Hülle hat.
 - c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.
2. Lösen Sie das in Aufgabe 5 b) auftretende lineare Gleichungssystem mit MATLAB. Stellen Sie anschließend das berechnete Polynom vierten Grades zusammen mit den vorgegebenen Werten und einem von Ihnen ausgewählten Polynom (echt) fünften Grades aus Aufgabenteil a) in einem gemeinsamen Plot dar. Beschriften Sie die Achsen und fügen Sie eine Legende hinzu.

Hinweis: Der Plotfunktion kann ein weiterer Parameter übergeben werden, mit dem die Farbe und der Stil der Verbindungslinien eingestellt werden kann. Zum Beispiel wird mit `'rx'` an jedem Punkt ein roter „x-Marker“ gezeichnet (siehe `>> help plot` und `>> doc plot`). Dies eignet sich, um die vorgegebenen Werte als einzelne Punkte darzustellen und um mehrere Funktionen durch verschiedene Farben leichter unterscheiden zu können.

3. Stellen Sie die drei Ebenen

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \quad 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \quad 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8$$

(vgl. Übung 9, Aufgabe 1 a)) in einem gemeinsamen Plot dar. Wählen Sie Ihre Darstellung so, dass die Schnitte der Ebenen zu erkennen sind.

Öffnen Sie die erstellte diary-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete diary-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur MATLABaufgabe

Gleichungssysteme und Rang

In MATLAB können lineare Gleichungssysteme mit dem Backslash-Operator gelöst werden.

Beispiel:

```
>> A=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
```

```
>> b=[3; 1; 4]
```

```
>> x=A\b
```

Dabei ist zu beachten, dass die Systemmatrix A quadratisch ist und vollen Rang hat, damit die Gleichung für jede rechte Seite b eindeutig lösbar ist. Der Rang einer Matrix A lässt sich mit

```
>> rank(A)
```

bestimmen.

Darstellen von Ebenen

Um eine Ebene im 3-dimensionalen Raum darzustellen, kann man beispielsweise drei Punkte der Ebene auswählen und das von ihnen erzeugte Dreieck zeichnen. Der Befehl

```
>> patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2],[0 1 0]);
```

stellt die durch $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$ gegebene Ebene dar, wobei $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus-

gewählte Punkte der Ebene sind. Durch Rotation (Tools → Rotate 3D) können Sie sich die 3-dimensionale Darstellung verdeutlichen. Mit

```
>> patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2],[0 0 1], 'FaceAlpha', 0.5);
```

kann man die Darstellung verbessern. Mit dem vierten Parameter (hier: $[0 0 1]$) werden die Rot-Grün-Blau-Anteile der Farbe eingestellt und mit dem letzten Parameter (hier: 0.5) kann man die Transparenz des Objektes steuern.

Aufgabenkomplex 4: Lineare Gleichungssysteme

Letzter Abgabetermin: 08. Januar 2009

1. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem $x - 2y + 3z = 4$ in
 $4x + 3y - 10z = 5$
 $5x - 3y + az = b$

Abhängigkeit von den Parametern a und b !

Geben Sie jeweils auch den Rang der Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

Lösung:

1	-2	3	4	
4	3	-10	5	$\text{II} - 4 \cdot \text{I}$
5	-3	a	b	$\text{III} - 5 \cdot \text{I}$
1	-2	3	4	
0	11	-22	-11	$\frac{1}{11} \cdot \text{II}$
0	7	$a-15$	$b-20$	
1	-2	3	4	
0	1	-2	-1	
0	7	$a-15$	$b-20$	$\text{III} - 7 \cdot \text{II}$
1	-2	3	4	
0	1	-2	-1	
0	0	$a-1$	$b-13$	$\frac{1}{a-1} \cdot \text{III}$ falls $a \neq 1$
1	-2	3	4	$\text{I} - 3 \cdot \text{III}$
0	1	-2	-1	$\text{II} + 2 \cdot \text{III}$
0	0	1	$\frac{b-13}{a-1}$	
1	-2	0	$\frac{4a-3b+35}{a-1}$	$\text{I} + 2 \cdot \text{II}$
0	1	0	$\frac{-a+2b-25}{a-1}$	
0	0	1	$\frac{b-13}{a-1}$	
1	0	0	$\frac{2a+b-15}{a-1}$	
0	1	0	$\frac{-a+2b-25}{a-1}$	
0	0	1	$\frac{b-13}{a-1}$	$x = \frac{2a+b-15}{a-1}, y = \frac{-a+2b-25}{a-1}, z = \frac{b-13}{a-1}$

Der Fall $a=1$ muss gesondert behandelt werden. In diesem lautet das Schema im 4. Schritt

1	-2	3	4	
0	1	-2	-1	
0	0	0	$b-13$	für $b \neq 13$ Widerspruch: $0x+0y+0z=b-13 \implies \text{GS unlösbar}$

Abschließend muss noch der Fall $a=1, b=13$ behandelt werden. In diesem ergibt sich

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & -2 & 3 & 4 \\
 0 & 1 & -2 & -1 \\
 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\
 \hline
 1 & -2 & 3 & 4 \\
 0 & 1 & -2 & -1 \\
 \hline
 1 & \mathbf{0} & -1 & 2 \\
 0 & 1 & -2 & -1
 \end{array}$$

Nullzeile: $0x+0y+0z=0$, gilt immer, kann gestrichen werden
 $I + 2 \cdot II$
 Zeilenstufenform, 1 frei wählbarer Parameter (zweckmäßig: $z=t$)

$$\begin{aligned}
 x - z = 2: & \quad x = 2 + z = 2 + t \\
 y - 2z = -1: & \quad y = -1 + 2z = -1 + 2t
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{spez. Lsg} \\ \text{inhom. GS}}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{allg. Lsg} \\ \text{hom. GS}}}$$

Im Falle $a \neq 1$ gilt für die Koeffizientenmatrix $\text{Rang}(A) = 3$. Der Rang ist gleich der Zahl der Gleichungen, damit ist keine Gleichung überflüssig. Er ist auch gleich der Zahl der Variablen, damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar für jede rechte Seite. (Die Lösung enthält $n - \text{Rang}(a) = 3 - 3 = 0$ frei wählbare Parameter.)

Im Falle $a = 1$ gilt für die Koeffizientenmatrix $\text{Rang}(A) = 2$. Der Rang ist um 1 kleiner als die Zahl der Gleichungen, damit ist im zugehörigen homogenen Gleichungssystem eine Gleichung überflüssig. Er ist auch kleiner als die Zahl der Variablen, damit ist das zugehörige homogene Gleichungssystem mehrdeutig lösbar, die Lösung enthält $n - \text{Rang}(a) = 3 - 2 = 1$ frei wählbaren Parameter. Das inhomogene Gleichungssystem ist unlösbar oder mehrdeutig lösbar mit einem freien Parameter.

Geometrische Interpretation: Lagebeziehung zwischen 3 Ebenen

- $a \neq 1$: Die 3 Ebenen schneiden sich in einem Punkt.
- $a = 1, b \neq 13$: Die Schnittgerade der beiden ersten Ebenen ist zur 3. Ebene (echt) parallel, so dass die 3 Ebenen keinen gemeinsamen Punkt haben.
- $a = 1, b = 13$: Die Schnittgerade der beiden ersten Ebenen liegt in der 3. Ebene, ist also Lösung.

2. Für welche Werte von a sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ a \end{pmatrix}$ linear abhängig?

Stellen Sie in diesem Falle den dritten Vektor als Linearkombination der beiden anderen dar!

Lösung:

Bei den Vektoren handelt es sich um die Spalten der Koeffizientenmatrix aus Aufgabe 1. Für $a \neq 1$ ist der Rang dieser Matrix gleich 3, sie enthält also 3 linear unabhängige Spalten, so dass der gegebene Vektor keine Linearkombination der beiden anderen Vektoren sein kann.

Im Falle $a = 1$ ist der Rang der Matrix allerdings gleich 2. Da die ersten beiden Spalten offensichtlich voneinander linear unabhängig sind, muss die dritte Spalte linear von diesen abhängen. Das zu dem Gleichungssystem aus Aufgabe 1 zugehörige homogene Gleichungssystem hat die

allgemeine Lösung $\vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, damit gilt $t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + 2t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$. Wählt man $t = 1$,

so erhält man schließlich die Darstellung $\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. a) Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= -8 \\x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 13 \\2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 5 \\x_1 - 3x_3 + 5x_4 &= b \quad \text{an!}\end{aligned}$$

b) Für welche Werte des Parameters b ist das Gleichungssystem lösbar?

c) Berechnen Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!

Lösung:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 13 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 5 & b \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & b+8 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b+29 \end{array} \end{array}$$

b) Die letzte Zeile bedeutet $0 = b + 29$, also ist das Gleichungssystem nur für $b = -29$ lösbar.

$$\begin{array}{l} \text{c) } \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 5 & -29 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 21 \end{array} \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems im Falle $b = -29$ lautet also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 21 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. In einer Mensa werden die Essen A, B und C (damit sich hier mit einfachen Zahlen rechnen lässt) an Studenten zum Preis von 1, 2 bzw. 3 € und an Mitarbeiter zum Preis von 2, 4 bzw. 5 € abgegeben. An einem Tag werden 3000 Essenportionen verkauft und ein Umsatz von 7100 € erzielt. Dabei werden an Studenten insgesamt fünfmal so viele Portionen ausgegeben wie an Mitarbeiter. Der Wareneinsatz beträgt bei dem Essen A 1 € sowie bei den Essen B und C 1,50 € pro Portion und insgesamt an diesem Tag 4150 €. Der Personalaufwand beträgt bei den Essen A und B 1,50 € sowie beim Essen C 2 € pro Person und insgesamt an diesem Tag 4950 €.

a) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Zahl der an Studenten bzw. Mitarbeiter abgegebenen Portionen der einzelnen Essen auf!

b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!

c) Wie viele verschiedene Lösungen für den beschriebenen Sachverhalt gibt es?

Lösung:

- a) an Studenten: x_1 Portionen A, x_2 Portionen B, x_3 Portionen C,
 an Mitarbeiter: x_4 Portionen A, x_5 Portionen B, x_6 Portionen C

$$\begin{array}{l} \text{Portionen:} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3000 \\ \text{Umsatz in €:} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 7100 \\ \text{Verhältnis Studenten/Mitarbeiter:} \quad x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 - 5x_5 - 5x_6 = 0 \\ \text{Wareneinsatz in €:} \quad x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 + x_4 + 1.5x_5 + 1.5x_6 = 4150 \\ \text{Personalaufwand in €:} \quad 1.5x_1 + 1.5x_2 + 2x_3 + 1.5x_4 + 1.5x_5 + 2x_6 = 4950 \end{array}$$

- b) Zur Vereinfachung der Darstellung werden die letzten beiden Gleichungen für das Gaußsche-
 ma mit 2 multipliziert:

1	1	1	1	1	1	3000	1	1	1	1	0	0	2600
1	2	3	2	4	5	7100	0	1	2	1	0	1	2900
1	1	1	-5	-5	-5	0	0	0	1	0	0	1	900
2	3	3	2	3	3	8300	0	0	0	1	0	0	100
3	3	4	3	3	4	9900	0	0	0	0	1	1	400
1	1	1	1	1	1	3000	1	1	1	0	0	0	2500
0	1	2	1	3	4	4100	0	1	2	0	0	1	2800
0	0	0	-6	-6	-6	-3000	0	0	1	0	0	1	900
0	1	1	0	1	1	2300	0	0	0	1	0	0	100
0	0	1	0	0	1	900	0	0	0	0	1	1	400
1	1	1	1	1	1	3000	1	1	0	0	0	0	1600
0	1	2	1	3	4	4100	0	1	0	0	0	1	1000
0	0	0	1	1	1	500	0	0	1	0	0	1	900
0	0	-1	-1	-2	-3	-1800	0	0	0	1	0	0	100
0	0	1	0	0	1	900	0	0	0	0	1	1	400
1	1	1	1	1	1	3000	1	0	0	0	0	0	600
0	1	2	1	3	4	4100	0	1	0	0	0	1	1000
0	0	1	0	0	1	900	0	0	1	0	0	1	900
0	0	0	1	1	1	500	0	0	0	1	0	0	100
0	0	0	-1	-2	-2	-900	0	0	0	0	1	1	400
1	1	1	1	1	1	3000							$x_1 = 600$
0	1	2	1	3	4	4100							$x_2 - x_6 = 1000$
0	0	1	0	0	1	900							$x_3 + x_6 = 900$
0	0	0	1	1	1	500							$x_4 = 100$
0	0	0	0	1	1	400							$x_5 + x_6 = 400$

Mit $x_6 = \lambda$ erhält man die Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 1000 + \lambda \\ 900 - \lambda \\ 100 \\ 400 - \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Alle Portionszahlen müssen nichtnegativ und ganzzahlig sein, also muss λ eine ganze Zahl mit $0 \leq \lambda \leq 400$ sein. Dann werden an Studenten 600 Portionen Essen A, $1000 + \lambda$ Essen B und $900 - \lambda$ Essen C ausgegeben, an Mitarbeiter 100 Essen A, $400 - \lambda$ Essen B und λ Essen C.

- c) Da λ eine ganze Zahl mit $0 \leq \lambda \leq 400$ sein muss, gibt es 401 verschiedene Lösungen.

5. a) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller Polynome höchstens fünften Grades $P_5(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$, die an den Stellen $x = -2, -1, 0, 1$ und 2 in dieser Reihenfolge die Werte $74, 12, 4, 2$ und -18 annehmen!
 b) Welches Polynom vierten Grades hat die beschriebenen Eigenschaften?

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_5(0) &= a & &= 4 \\ P_5(1) &= a + b + c + d + e + f = 2 \\ P_5(-1) &= a - b + c - d + e - f = 12 \\ P_5(-2) &= a + 2b + 4c + 8d + 16e + 32f = -18 \\ P_5(2) &= a - 2b + 4c - 8d + 16e - 32f = 74 \end{aligned}$$

1	0	0	0	0	0	4
1	1	1	1	1	1	2
1	-1	1	-1	1	-1	12
1	2	4	8	16	32	-18
1	-2	4	-8	16	-32	74
<hr/>						
1	0	0	0	0	0	4
0	1	1	1	1	1	-2
0	-1	1	-1	1	-1	8
0	2	4	8	16	32	-22
0	-2	4	-8	16	-32	70
<hr/>						
1	0	0	0	0	0	4
0	1	1	1	1	1	-2
0	0	2	0	2	0	6
0	0	2	6	14	30	-18
0	0	6	-6	18	-30	66
<hr/>						
1	0	0	0	0	0	4
0	1	1	1	1	1	-2
0	0	1	0	1	0	3
0	0	0	6	12	30	-24
0	0	0	-6	12	-30	48
<hr/>						
1	0	0	0	0	0	4
0	1	1	1	1	1	-2
0	0	1	0	1	0	3
0	0	0	1	2	5	-4
0	0	0	0	24	0	24

1	0	0	0	0	0	4
0	1	1	1	1	1	-2
0	0	1	0	1	0	3
0	0	0	1	2	5	-4
0	0	0	0	1	0	1
<hr/>						
1	0	0	0	0	0	4
0	1	1	1	0	1	-3
0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	1	0	5	-6
0	0	0	0	1	0	1
<hr/>						
1	0	0	0	0	0	4
0	1	1	0	0	-4	3
0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	1	0	5	-6
0	0	0	0	1	0	1
<hr/>						
1	0	0	0	0	0	4
0	1	0	0	0	-4	1
0	0	1	0	0	0	2
0	0	0	1	0	5	-6
0	0	0	0	1	0	1
<hr/>						
				a		$= 4$
				$b - 4f$		$= 1$
				c		$= 2$
				$d + 5f$		$= -6$
				e		$= 1$

Mit $f = \lambda$ erhält man als Lösung des Gleichungssystems
$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle Polynome $P_5(x) = 4 + (1 + 4\lambda)x + 2x^2 - (6 + 5\lambda)x^3 + x^4 + \lambda x^5$ haben die beschriebenen Eigenschaften.

- b) Damit es sich um ein Polynom vierten Grades handelt, muss $f = \lambda = 0$ sein. Folglich ist $P_4(x) = 4 + x + 2x^2 - 6x^3 + x^4$ das gesuchte Polynom.

Zusatzaufgabe

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(vgl. Übung 9, Aufgabe 1 a) und Hausaufgabe 4, Aufgabe 2).

- Bestimmen Sie den Rang der Matrix A .
 - Finden Sie mithilfe der `rank`-Funktion heraus, ob die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind und welche Dimension ihre lineare Hülle hat.
 - Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.
2. Lösen Sie das in Aufgabe 5 b) auftretende lineare Gleichungssystem mit MATLAB. Stellen Sie anschließend das berechnete Polynom vierten Grades zusammen mit den vorgegebenen Werten und einem von Ihnen ausgewählten Polynom (echt) fünften Grades aus Aufgabenteil a) in einem gemeinsamen Plot dar. Beschriften Sie die Achsen und fügen Sie eine Legende hinzu.

Hinweis: Der Plotfunktion kann ein weiterer Parameter übergeben werden, mit dem die Farbe und der Stil der Verbindungslinien eingestellt werden kann. Zum Beispiel wird mit `'rx'` an jedem Punkt ein roter „x-Marker“ gezeichnet (siehe `>> help plot` und `>> doc plot`). Dies eignet sich, um die vorgegebenen Werte als einzelne Punkte darzustellen und um mehrere Funktionen durch verschiedene Farben leichter unterscheiden zu können.

3. Stellen Sie die drei Ebenen

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \quad 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \quad 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8$$

(vgl. Übung 9, Aufgabe 1 a)) in einem gemeinsamen Plot dar. Wählen Sie Ihre Darstellung so, dass die Schnitte der Ebenen zu erkennen sind.

Öffnen Sie die erstellte diary-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete diary-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Lösung:

nachbereitete diary-Datei (Kommentare durch `%` gekennzeichnet) und Plots auf den nächsten Seiten

```

% -----
% Aufgabe 1
% -----

A=[1 -2 3; 3 1 -5; 2 -3 3]
A =
     1     -2     3
     3     1    -5
     2    -3     3

b=[4; 5; 8]
b =
     4
     5
     8

v1=[1; 4; 5]
v1 =
     1
     4
     5

v2=[-2; 3; -3]
v2 =
    -2
     3
    -3

v3=[3; -10; 1]
v3 =
     3
    -10
     1

% a) -----
rank(A)
ans =
     3

% b) -----
rank([v1 v2 v3])
ans =
     2

disp(' '),disp('Die Vektoren sind also linear abhängig und die Dimension
ihrer linearen Hülle ist 2. '),disp(' ')

Die Vektoren sind also linear abhängig und die Dimension ihrer linearen
Hülle ist 2.

% c) -----
x=A\b
x =
    1.0000
   -3.0000
   -1.0000

```

```

% -----
% Aufgabe 2
% -----

% vorgegebene Werte x und f setzen
x=[-2 -1 0 1 2]
x =
    -2    -1     0     1     2

f=[74 12 4 2 -18]
f =
    74    12     4     2   -18

% Systemmatrix aufstellen
A=[1 x(1) x(1)^2 x(1)^3 x(1)^4;
  1 x(2) x(2)^2 x(2)^3 x(2)^4;
  1 x(3) x(3)^2 x(3)^3 x(3)^4;
  1 x(4) x(4)^2 x(4)^3 x(4)^4;
  1 x(5) x(5)^2 x(5)^3 x(5)^4]
A =
     1     -2     4    -8    16
     1     -1     1    -1     1
     1     0     0     0     0
     1     1     1     1     1
     1     2     4     8    16

a=A\f'
a =
     4
     1
     2
    -6
     1

z=linspace(-2.5,2.5,100);

% gerade berechnetes Polynom vierten Grades auswerten
P4=a(1)+a(2)*z+a(3)*z.^2+a(4)*z.^3+a(5)*z.^4;

% eines der in Aufgabe 5a) berechneten Polynome fünften Grades auswerten
lambda=4;
P5=P4+lambda*(4*z-5*z.^3+z.^5);

plot(x,f','rx','MarkerSize',9,'LineWidth',2);
hold on;
plot(z,P4,'b-');
plot(z,P5,'g-');
xlabel('x'); ylabel('P(x)'); grid on;
title('Interpolationspolynome vom Grad vier und fünf');
legend('vorgegebene Werte','Polynom vom Grad vier',['Polynom vom Grad
fünf (f=\lambda=',num2str(lambda),')']);
print -depsc ak4_zusatz_2.eps

```

```

% -----
% Aufgabe 3
% -----

figure;

% zeichne Ebene  $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$ 
% durch die Punkte  $[4 -6 -4]$ ,  $[6 1 0]$  und  $[-7 -4 1]$ 
patch([4 6 -7],[-6 1 -4],[-4 0 1],[1 0 0],'FaceAlpha',0.5);
%
% Dieser Befehl funktioniert unter Octave-3.0.1 mit Jhandle nicht korrekt.
% Statt dessen sollte dort der Befehl
%
% patch([4 6 -7],[-6 1 -4],[-4 0 1], 'cdata', reshape([1 0 0],1,1,3),
% 'facecolor', 'flat', 'FaceAlpha',0.5);
%
% verwendet werden.
%

hold on;

% zeichne Ebene  $3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5$ 
% durch die Punkte  $[2 -6 -1]$ ,  $[4 -2 1]$  und  $[-3 -1 -3]$ 
patch([2 4 -3],[-6 -2 -1],[-1 1 -3],[0 1 0],'FaceAlpha',0.5);

% zeichne Ebene  $2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 8$ 
% durch die Punkte  $[1 -1 1]$ ,  $[4 -2 -2]$  und  $[-2 -6 -2]$ 
patch([1 4 -2],[-1 -2 -6],[1 -2 -2],[0 0 1],'FaceAlpha',0.5);

% Schnittpunkt einzeichnen
plot3(1,-3,-1,'Marker','x','Color','k','MarkerSize',20,'LineWidth',3)

% Achsen beschriften
xlabel('x_1'), ylabel('x_2'), zlabel('x_3')

% dreidimensionale Darstellung mit Default-Viewpoint
view(3)
viewparam=get(gca(),'view')
viewparam =
    -37.5000    30.0000

title(['Ebenenschnitt (Viewpoint: azimuth=',num2str(viewparam(1)),',
elevation=',num2str(viewparam(2)),',)']);

print -depsc ak4_zusatz_3.eps
print -dpng ak4_zusatz_3.png

diary off

```

