Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

16. Dezember 2008

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 4: Lineare Gleichungssysteme

Letzter Abgabetermin: 08. Januar 2009
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 4" kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x-2y+\ 3z&=4\\ 4x+3y-10z&=5\\ 5x-3y+\ az&=b \end{aligned}$$
in Abhängigkeit von den Parametern a und b !

   Geben Sie jeweils auch den Rang der Koeffizientenmatrix an und stellen Sie den Zusammenhang zu den Lösbarkeitseigenschaften der Gleichungssysteme dar! Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

2. Für welche Werte von a sind die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-2\\3\\-3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}3\\-10\\a\end{pmatrix}$ linear abhängig?

   Stellen Sie in diesem Falle den dritten Vektor als Linearkombination der beiden anderen dar!

3. a) Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} x_1+x_2-x_3+2x_4&=-8\\ x_1+2x_2+x_3-x_4&=13\\ 2x_1+3x_2\phantom{{}+x_3}+x_4&=5\\ x_1\phantom{{}+x_2}-3x_3+5x_4&=b \end{aligned}$$
an!

   b) Für welche Werte des Parameters b ist das Gleichungssystem lösbar?

   c) Berechnen Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!

4. In einer Mensa werden die Essen A, B und C (damit sich hier mit einfachen Zahlen rechnen lässt) an Studenten zum Preis von 1, 2 bzw. 3 € und an Mitarbeiter zum Preis von 2, 4 bzw. 5 € abgegeben. An einem Tag werden 3000 Essenportionen verkauft und ein Umsatz von 7100 € erzielt. Dabei werden an Studenten insgesamt fünfmal so viele Portionen ausgegeben wie an Mitarbeiter. Der Wareneinsatz beträgt bei dem Essen A 1 € sowie bei den Essen B und C 1,50 € pro Portion und insgesamt an diesem Tag 4150 €. Der Personalaufwand beträgt bei den Essen A und B 1,50 € sowie beim Essen C 2 € pro Person und insgesamt an diesem Tag 4950 €.

   a) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Zahl der an Studenten bzw. Mitarbeiter abgegebenen Portionen der einzelnen Essen auf!

   b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!

   c) Wie viele verschiedene Lösungen für den beschrieben Sachverhalt gibt es?

5. a) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller Polynome höchstens fünften Grades $P_5(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5$, die an den Stellen $x=-2, -1, 0, 1$ und 2 in dieser Reihenfolge die Werte 74, 12, 4, 2 und -18 annehmen!

   b) Welches Polynom vierten Grades hat die beschriebenen Eigenschaften?

Zusatzaufgabe auf Seite 2

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (vgl. Übung 9, Aufgabe 1 a) und Hausaufgabe 4, Aufgabe 2).

   a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A.
   b) Finden Sie mithilfe der `rank`-Funktion heraus, ob die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind und welche Dimension ihre lineare Hülle hat.
   c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$.

2. Lösen Sie das in Aufgabe 5 b) auftretende lineare Gleichungssystem mit `MATLAB`. Stellen Sie anschließend das berechnete Polynom vierten Grades zusammen mit den vorgegebenen Werten und einem von Ihnen ausgewählten Polynom (echt) fünften Grades aus Aufgabenteil a) in einem gemeinsamen Plot dar. Beschriften Sie die Achsen und fügen Sie eine Legende hinzu.
   Hinweis: Der Plotfunktion kann ein weiterer Parameter übergeben werden, mit dem die Farbe und der Stil der Verbindungslinien eingestellt werden kann. Zum Beispiel wird mit `'rx'` an jedem Punkt ein roter „x-Marker" gezeichnet (siehe $\gg$ `help plot` und $\gg$ `doc plot`). Dies eignet sich, um die vorgegebenen Werte als einzelne Punkte darzustellen und um mehrere Funktionen durch verschiedene Farben leichter unterscheiden zu können.

3. Stellen Sie die drei Ebenen

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \qquad 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 5, \qquad 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 8$$

   (vgl. Übung 9, Aufgabe 1 a)) in einem gemeinsamen Plot dar. Wählen Sie ihre Darstellung so, dass die Schnitte der Ebenen zu erkennen sind.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen" Hausaufgabe an.

Hinweise zur `MATLAB`aufgabe

Gleichungssysteme und Rang

In `MATLAB` können lineare Gleichungssysteme mit dem Backslash-Operator gelöst werden. Beispiel:

```
≫ A=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
≫ b=[3; 1; 4]
≫ x=A\b
```

Dabei ist zu beachten, dass die Systemmatrix A quadratisch ist und vollen Rang hat, damit die Gleichung für jede rechte Seite b eindeutig lösbar ist. Der Rang einer Matrix A lässt sich mit

```
≫ rank(A)
```

bestimmen.

Darstellen von Ebenen

Um eine Ebene im 3-dimensionalen Raum darzustellen, kann man beispielsweise drei Punkte der Ebene auswählen und das von ihnen erzeugte Dreieck zeichnen. Der Befehl

```
≫ patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2],[0 1 0]);
```

stellt die durch $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$ gegebene Ebene dar, wobei $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ausgewählte Punkte der Ebene sind. Durch Rotation (Tools –> Rotate 3D) können Sie sich die 3-dimensionale Darstellung verdeutlichen. Mit

```
≫ patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2],[0 0 1],'FaceAlpha',0.5);
```

kann man die Darstellung verbessern. Mit dem vierten Parameter (hier: `[0 0 1]`) werden die Rot-Grün-Blau-Anteile der Farbe eingestellt und mit dem letzten Parameter (hier: `0.5`) kann man die Transparenz des Objektes steuern.