Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

26. November 2008

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 3: Vektoren, Matrizen

Letzter Abgabetermin: 15. Dezember 2008
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 3“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die Dimension der linearen Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$! Was stellt diese Menge geometrisch dar?

   b) Gehören die Vektoren $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der linearen Hülle an?

2. Für welche Werte des Parameters a handelt es sich bei der Menge
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$
um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$?
Geben Sie in diesen Fällen die Dimension des Unterraumes an!

3. Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

   a) $\boldsymbol{A}\vec{x} + \vec{y}$, b) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} + \vec{x}$, c) $\vec{y}\boldsymbol{A}\vec{x}$, d) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{x}$, e) $\vec{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{y}$, f) $\vec{x}^{\mathsf{T}}(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})^{\mathsf{T}}$, g) $\boldsymbol{A}\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}$, h) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}\vec{x}^{\mathsf{T}}$!

4. Was bewirkt die Multiplikation einer dreizeiligen Matrix von links mit

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

5. Es werden drei Produkte P_1, P_2 und P_3 aus drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und diese aus drei Ausgangsstoffen R_1, R_2 und R_3 gefertigt, wobei im Einzelnen folgender Bedarf besteht:

	je P_1	je P_2	je P_3
B_1	3	4	2
B_2	0	3	3
B_3	3	3	5

	R_1	R_2	R_3
je B_1	1	2	4
je B_2	3	1	3
je B_3	2	2	1

   a) Stellen Sie dar, wie sich aus den beiden gegebenen Matrizen die Aufwandsmatrix für den Bedarf an Ausgangsstoffen je Endprodukt errechnet und führen Sie diese Berechnung aus!

   b) Bestimmen Sie mithilfe der bei a) ermittelten Aufwandsmatrix den Bedarf an Ausgangsstoffen, der für die Herstellung von 100 Produkten P_1, 200 Produkten P_2 und 400 Produkten P_3 erforderlich ist!

Zusatzaufgabe auf Seite 2

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha = 3.$$
   a) Berechnen Sie $A+B$, $A-B$, αA, $A\vec{w}$, $AB\vec{w}$, $\vec{w}^\top$, $A^\top$, $B^\top$, $A^\top\vec{w}$ und $\left(A^\top\right)^\top$.
   b) Berechnen Sie AB, BA, $(A+B)^\top$, $A^\top+B^\top$, $(\alpha A)^\top$, $\alpha A^\top$, $(AB)^\top$, $B^\top A^\top$ sowie $A^\top B^\top$. Überzeugen Sie sich für dieses Beispiel von der Nichtkommutativiät der Multiplikation (Beispiel 2.25 (b) der Vorlesung) und den Rechenregeln für das Transponieren (Satz 2.26 (f)-(h) der Vorlesung).
2. Lösen Sie obige Aufgabe 3 mit Hilfe von `MATLAB`. Geben Sie dabei alle Ausdrücke von a) bis h) ein.
3. Es sei
$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & 9 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix},\, \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie EC, CE, $E\vec{p}$, $C\vec{p}$, $\vec{p}^\top C$, CP und PC. (Überlegen Sie sich vor der Befehlseingabe, welche Ergebnisse zu erwarten sind.)
4. Weiter sei
$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix},\, \vec{t} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$
   a) Berechnen Sie $\|\vec{s}\|$, $\|\vec{t}\|$, $\|\vec{s}+\vec{t}\|$, $\|\vec{s}\|+\|\vec{t}\|$. Überzeugen Sie sich davon, dass die Dreiecksungleichung (Satz 2.16 (g) der Vorlesung) erfüllt ist.
   b) Berechnen Sie den Winkel Zwischen $\vec{s}$ und $\vec{t}$. Geben Sie den Winkel sowohl in Bogenmaß als auch in Grad an.
   Hinweis: Die `arccos`-Funktion heißt in `MATLAB` `acos`.
5. Es sei
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Stellen Sie die lineare Hülle grafisch dar. Plotten Sie dazu die neun Linearkombinationen
$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$
   für $\alpha, \beta \in \{-1, 0, 1\}$ in einen Plot. Drehen Sie die Ansicht so, dass zu erkennen ist, dass alle Vektoren in einer Ebene liegen. Geben Sie dem Plot einen Titel, der die Namen der Mitglieder Ihrer Hausaufgabengruppe enthält.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen" Hausaufgabe an.

Hinweise zur `MATLAB`aufgabe

Matrizen und Vektoren

In `MATLAB` wird nicht zwischen einem Vektor und einer Matrix unterschieden. Spalten-/ Zeilenvektoren sind Matrizen mit nur einer Spalte/Zeile. Matrizen werden in eckigen Klammern zeilenweise eingegeben. Hierbei wird das Zeilenende mit einem Semikolon angezeigt. Die Einträge in einer Zeile können mit einem Komma abgetrennt werden. Der folgende Befehl erzeugt die beiden Matrizen A und B aus Beispiel 2.25 aus der Vorlesung.

```
≫ A=[2 1 3; -1 0 1]
≫ B=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
```

Analog ergibt sich die Eingabe eines Spaltenvektors als Eingabe einer Matrix mit nur einer Spalte. Beispiel:

```
≫ v=[-3; 4; 7]
≫ w=[-2; -3; 1]
```

Vektoren können genutzt werden, um daraus Matrizen zu erzeugen. Beispiel:

```
≫ C=[v w [1; -1; 4]]
```

Ein Zugriff auf einen Eintrag geschieht durch die Angabe der Zeilen- und Spaltennummer. Beispiel:

```
≫ A(2,3)
≫ v(3)
≫ v(3)=5
≫ v
```

Um auf eine ganze Zeile/Spalte zugreifen, verwendet man einen Doppelpunkt. Beispiel:

```
≫ A(:,3)
≫ A(1,:)
```

Die Einheitsmatrix der Größe 3×3 und die Nullmatrix der Größe 2×3 lassen sich wie folgt erzeugen.

```
≫ E=eye(3)
≫ Z=zeros(2,3)
```

Das Rechnen mit Matrizen funktioniert mit den „natürlichen“ Rechenzeichen. Beispiel:

```
≫ B+C
≫ 2*A
≫ B*v
≫ A*B
```

Das Transponieren einer Matrix wird mit einem Hochkomma realisiert. Beispiel:

```
≫ A'
≫ B'
≫ v'
≫ B'*A'
```

Die Norm (Länge) eines Vektors kann mit der Funktion `norm` berechnet werden. Beispiel:

```
≫ norm(v)
```

Um einen 2- bzw. 3-dimensionalen Vektor darzustellen, kann man beispielsweise die Verbindungslinie vom Koordinatenursprung $\vec{0}$ nach $\vec{v}$ mit dem Befehl `plot` bzw. `plot3` zeichnen. Der Befehl

```
≫ plot3( [0, v(1)] , [0, v(2)] , [0, v(3)] )
```

bildet den Vektor `v` ab. Mit ≫ `grid on` kann man die Darstellung verbessern.

Aufgabenkomplex 3: Vektoren, Matrizen

Letzter Abgabetermin: 15. Dezember 2008

---

1. a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die Dimension der linearen Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$! Was stellt diese Menge geometrisch dar?

b) Gehören die Vektoren $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der linearen Hülle an?

Lösung:

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind offensichtlich voneinander linear unabhängig, so dass die Dimension der linearen Hülle mindestens 2 ist. In Abhängigkeit vom Parameter a muss nun noch ermittelt werden, ob der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix}$ von diesen Vektoren linear abhängt:

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}:$$

$$\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 3 & 2 & 14 \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & a \\ 3 & 2 & 14 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & a+\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{25}{2} \\ \hline 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & \frac{3}{2} & a+\frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & a+8 \\ \hline 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & a+8 \end{array}$$

Für $a \neq -8$ ist das homogene Gleichungssystem nur trivial lösbar, für $a = -8$ hat es die Lösung $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Für $a \neq -8$ sind die 3 Vektoren linear unabhängig und damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$, ihre lineare Hülle hat die Dimension 3 und ist der gesamte Raum $\mathbb{R}^3$.

Für $a = -8$ ergibt sich $\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und als lineare Hülle

$$\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ (\alpha+5\beta) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (\gamma-8\beta) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

die von den Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Koordinatenursprung, ihre Dimension ist 2.

b) Für $a \neq -8$ gehören alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ und damit auch die beiden genannten zur linearen Hülle.

Für $a = -8$ ist noch zu ermitteln, ob die genannten Vektoren in der beschriebenen Ebene liegen:

$$\begin{array}{rr|rr} 2 & 3 & -10 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -10 & 5 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & -10 & 5 \\ 3 & 2 & -10 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 20 \\ \hline 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 20 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array}$$

Im Falle $\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$ führt die Bestimmung der Koeffizienten auf den Widerspruch $0=10$, der Punkt liegt außerhalb der Ebene. Für $\begin{pmatrix}-10\\2\\-10\end{pmatrix}$ gilt hingegen $\begin{pmatrix}-10\\2\\-10\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, so dass der Punkt in der Ebene liegt, d.h. der Vektor der linearen Hülle angehört.

---

2. Für welche Werte des Parameters a handelt es sich bei der Menge
$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\a\\14\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix},\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$ um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$?
Geben Sie in diesen Fällen die Dimension des Unterraumes an!

Lösung:

Wie bei der Aufgabe 1 gezeigt wurde, lässt sich für $a\neq-8$ jeder Vektor des $\mathbb{R}^3$ in der Form $\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\a\\14\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ darstellen. Da auch $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ gilt, gibt es folglich Parameter α, β, γ, für die $\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\a\\14\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ gilt. Damit lassen sich dann also beliebige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ in der Form $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\a\\14\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$ darstellen.

Im Falle $a\neq-8$ handelt es sich bei der gegebenen Menge folglich um einen Unterraum, nämlich den Raum $\mathbb{R}^3$ selbst. (Wenn man den kompletten Raum um einen Vektor verschiebt, bleibt es der Raum.)

Im Falle $a=-8$ handelt es sich bei der Menge gemäß Lösung von Aufgabe 1 um die Ebene $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$. Damit die Ebene ein Unterraum ist, muss sie den Koordinatenursprung enthalten (Das Nullfache jedes Elements des Unterraumes, also der Nullvektor, muss im Unterraum enthalten sein):

$$\begin{array}{ll} 1+2\mu+3\nu=0 & \Longrightarrow 1+2\cdot1+3\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}=0,\ \text{Widerspruch} \\ 1-\ \mu\qquad\ =0 & \Longrightarrow \mu=1 \\ \quad 3\mu+2\nu=0 & \Longrightarrow \nu=-\frac{3}{2}\mu=-\frac{3}{2} \end{array}$$

Da die Rechnung auf einen Widerspruch führt, ist der Koordinatenursprung nicht in der Ebene enthalten, so dass es sich im Falle $a=-8$ bei der Menge um keinen Unterraum handelt.

3. Sei $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

a) $\boldsymbol{A}\vec{x}+\vec{y}$, b) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}+\vec{x}$, c) $\vec{y}\boldsymbol{A}\vec{x}$, d) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{x}$, e) $\vec{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{y}$, f) $\vec{x}^{\mathsf{T}}(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})^{\mathsf{T}}$, g) $\boldsymbol{A}\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}$, h) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}\vec{x}^{\mathsf{T}}$!

Lösung:

a) $\boldsymbol{A}\vec{x}+\vec{y}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix}$

b) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}+\vec{x}=(-2\quad 3)\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(0\quad -6\quad 5)+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ existiert nicht

c) Produkt von Matrizen vom Typ $2\times\mathbf{1}$, $\mathbf{2}\times 3$ und 3×1 existiert nicht wegen $\mathbf{1}\neq\mathbf{2}$

d) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{x}=(-2\quad 3)\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=(0\quad -6\quad 5)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=11$

e) Produkt von Matrizen vom Typ 1×3, 2×3 und 2×1 existiert nicht wegen $3\neq 2$

f) $\vec{x}^{\mathsf{T}}(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})^{\mathsf{T}}=(1\quad -1\quad 1)\left((-2\quad 3)\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^{\mathsf{T}}==(1\quad -1\quad 1)\begin{pmatrix}0\\-6\\5\end{pmatrix}=11$

(**oder** $\vec{x}^{\mathsf{T}}(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})^{\mathsf{T}}=\vec{x}^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\vec{y}^{\mathsf{TT}}=\vec{x}^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}\vec{y}=(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{x})^{\mathsf{T}}=11^{\mathsf{T}}=11$)

g) $\boldsymbol{A}\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}3 & 3 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(-2\quad 3)=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}(-2\quad 3)=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -6 & 9\end{pmatrix}$

h) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}\vec{x}^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}(1\quad -1\quad 1)=\begin{pmatrix}0\\-6\\5\end{pmatrix}(1\quad -1\quad 1)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -6 & 6 & -6\\ 5 & -5 & 5\end{pmatrix}$

---

4. Was bewirkt die Multiplikation einer dreizeiligen Matrix von links mit

a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ bzw. d) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$?

Lösung:

a) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots\\ a_{21} & a_{22} & \dots\\ a_{31} & a_{32} & \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots\\ a_{21} & a_{22} & \dots\\ 4a_{31} & 4a_{32} & \dots\end{pmatrix}$, d.h., die 3. Zeile wird mit 4 multipliziert.

b) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots\\ a_{21} & a_{22} & \dots\\ a_{31} & a_{32} & \dots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots\\ a_{31} & a_{32} & \dots\\ a_{21} & a_{22} & \dots\end{pmatrix}$, d.h., 2. und 3. Zeile werden vertauscht.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ 2a_{11}+a_{21} & 2a_{12}+a_{22} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots \end{pmatrix}$,

d.h., zur 2. Zeile wird das Doppelte der 1. Zeile addiert.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{12}+a_{22}+a_{32} & \dots \end{pmatrix}$,

d.h., es entsteht eine einzeilige Matrix, deren Elemente die Spaltensummen der Matrix sind.

---

5. Es werden drei Produkte P_1, P_2 und P_3 aus drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und diese aus drei Ausgangsstoffen R_1, R_2 und R_3 gefertigt, wobei im Einzelnen folgender Bedarf besteht:

	je P_1	je P_2	je P_3
B_1	3	4	2
B_2	0	3	3
B_3	3	3	5

	R_1	R_2	R_3
je B_1	1	2	4
je B_2	3	1	3
je B_3	2	2	1

a) Stellen Sie dar, wie sich aus den beiden gegebenen Matrizen die Aufwandsmatrix für den Bedarf an Ausgangsstoffen je Endprodukt errechnet und führen Sie diese Berechnung aus!

b) Bestimmen Sie mithilfe der bei a) ermittelten Aufwandsmatrix den Bedarf an Ausgangsstoffen, der für die Herstellung von 100 Produkten P_1, 200 Produkten P_2 und 400 Produkten P_3 erforderlich ist!

Lösung:

a) $\vec{r}$: Bedarf an Ausgangsstoffen,
$\vec{b}$: Bedarf an Baugruppen,
$\vec{p}$: Bedarf an Endprodukten

Endprodukte – Baugruppen: $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, Ausg.stoffe – Baugruppen: $\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \boldsymbol{A}_1 \vec{p}$, $\vec{r} = \boldsymbol{A}_2^\top \vec{b} = \boldsymbol{A}_2^\top \boldsymbol{A}_1 \vec{p}$ (Rohstoffbedarf für Endprodukte)

Aufwandsmatrix für den Zusammenhang von Endprodukten und Ausgangsstoffen also:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_2^\top \boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 19 & 21 \\ 12 & 17 & 17 \\ 15 & 28 & 22 \end{pmatrix}, \text{ d.h.}$$

	je P_1	je P_2	je P_3
R_1	9	19	21
R_2	12	17	17
R_3	15	28	22

b) $\vec{r} = \boldsymbol{A}\vec{p} = \begin{pmatrix} 9 & 19 & 21 \\ 12 & 17 & 17 \\ 15 & 28 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13100 \\ 11400 \\ 15900 \end{pmatrix}$

Es werden 13 100 Einheiten R_1, 11 400 Einheiten R_2 und 15 900 Einheiten R_3 benötigt.

Zusatzaufgabe

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha = 3.$$

   a) Berechnen Sie $A+B$, $A-B$, αA, $A\vec{w}$, $AB\vec{w}$, $\vec{w}^\top$, $A^\top$, $B^\top$, $A^\top\vec{w}$ und $\left(A^\top\right)^\top$.
   b) Berechnen Sie AB, BA, $(A+B)^\top$, $A^\top + B^\top$, $(\alpha A)^\top$, $\alpha A^\top$, $(AB)^\top$, $B^\top A^\top$ sowie $A^\top B^\top$. Überzeugen Sie sich für dieses Beispiel von der Nichtkommutativiät der Multiplikation (Beispiel 2.25 (b) der Vorlesung) und den Rechenregeln für das Transponieren (Satz 2.26 (f)-(h) der Vorlesung).

2. Lösen Sie obige Aufgabe 3 mit Hilfe von `MATLAB`. Geben Sie dabei alle Ausdrücke von a) bis h) ein.

3. Es sei

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & 9 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie EC, CE, $E\vec{p}$, $C\vec{p}$, $\vec{p}^\top C$, CP und PC. (Überlegen Sie sich vor der Befehlseingabe, welche Ergebnisse zu erwarten sind.)

4. Weiter sei

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

   a) Berechnen Sie $\|\vec{s}\|$, $\|\vec{t}\|$, $\|\vec{s}+\vec{t}\|$, $\|\vec{s}\| + \|\vec{t}\|$. Überzeugen Sie sich davon, dass die Dreiecksungleichung (Satz 2.16 (g) der Vorlesung) erfüllt ist.
   b) Berechnen Sie den Winkel Zwischen $\vec{s}$ und $\vec{t}$. Geben Sie den Winkel sowohl in Bogenmaß als auch in Grad an.
   Hinweis: Die `arccos`-Funktion heißt in `MATLAB` `acos`.

5. Es sei

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Stellen Sie die lineare Hülle grafisch dar. Plotten Sie dazu die neun Linearkombinationen

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

   für $\alpha, \beta \in \{-1, 0, 1\}$ in einen Plot. Drehen Sie die Ansicht so, dass zu erkennen ist, dass alle Vektoren in einer Ebene liegen. Geben Sie dem Plot einen Titel, der die Namen der Mitglieder Ihrer Hausaufgabengruppe enthält.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen" Hausaufgabe an.

Lösung:

```
% ---------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 1
% ---------------------------------------------------------------------------

A=[1 2; 3 -4]
A =
     1     2
     3    -4

B=[0 -2; 2 1]
B =
     0    -2
     2     1

w=[1; 2]
w =
     1
     2

alpha=3
alpha =
     3

% a) ------------------------------------------------------------------------

A+B
ans =
     1     0
     5    -3

A-B
ans =
     1     4
     1    -5

alpha*A
ans =
     3     6
     9   -12

A*w
ans =
     5
    -5

A*B*w
ans =
     4
   -28

w'
ans =
     1     2

A'
ans =
     1     3
     2    -4

B'
ans =
     0     2
    -2     1

A'*w
ans =
     7
    -6

(A')'
ans =
     1     2
     3    -4

% b) ------------------------------------------------------------------------

A_mal_B=A*B
A_mal_B =
     4     0
    -8   -10

B_mal_A=B*A
B_mal_A =
    -6     8
     5     0

fprintf('\nFaktoren '), if A_mal_B==B_mal_A, fprintf('vertauschbar\n\n'),
                         else fprintf('nicht vertauschbar\n\n'),
                        end

Faktoren nicht vertauschbar

A_plus_B__transp=(A+B)'
A_plus_B__transp =
     1     5
     0    -3

A_transp_plus_B_transp=A'+B'
A_transp_plus_B_transp =
     1     5
     0    -3

fprintf('\nAddition und Transposition '),
if A_plus_B__transp==A_transp_plus_B_transp, fprintf('vertauschbar\n\n'),
 else fprintf('nicht vertauschbar\n\n'),
end

Addition und Transposition vertauschbar

alpha_mal_A__transp=(alpha*A)'
alpha_mal_A__transp =
     3     9
     6   -12

alpha_mal_A_transp=alpha*A'
alpha_mal_A_transp =
     3     9
     6   -12
```

```
fprintf('\nMultiplikation mit Skalar und Transposition '),
if alpha_mal_A__transp==alpha_mal_A_transp, fprintf('vertauschbar\n\n'),
 else fprintf('nicht vertauschbar\n\n'),
end

Multiplikation mit Skalar und Transposition vertauschbar

A_mal_B__transp=(A*B)'
A_mal_B__transp =
     4    -8
     0   -10

B_transp_mal_A_transp=B'*A'
B_transp_mal_A_transp =
     4    -8
     0   -10

A_transp_mal_B_transp=A'*B'
A_transp_mal_B_transp =
    -6     5
     8     0

fprintf('\nMatrizenmultiplikation und Transposition '),
if A_mal_B__transp==A_transp_mal_B_transp, fprintf('vertauschbar\n\n'),
 else fprintf('nicht vertauschbar\n\n'),
end

Matrizenmultiplikation und Transposition nicht vertauschbar

fprintf('\nMatrizenmultiplikation und Transposition '),
if A_mal_B__transp==B_transp_mal_A_transp, fprintf('vertauschbar'),
 else fprintf('nicht vertauschbar'),
end, fprintf(', wenn auch Faktoren vertauscht werden\n\n')

Matrizenmultiplikation und Transposition vertauschbar, wenn auch Faktoren
vertauscht werden
```

```
% -----------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 2
% -----------------------------------------------------------------------

A=[3 3 -1; 2 0 1]
A =
     3     3    -1
     2     0     1

x=[1; -1; 1]
x =
     1
    -1
     1

y=[-2; 3]
y =
    -2
     3

A*x+y
ans =
    -3
     6

y'*A+x
??? Error using ==> plus
Matrix dimensions must agree.

y*A*x
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.

y'*A*x
ans =
    11

x'*A*y
??? Error using ==> mtimes
Inner matrix dimensions must agree.

x'*(y'*A)'
ans =
    11

A*x*y'
ans =
     2    -3
    -6     9

A'*y*x'
ans =
     0     0     0
    -6     6    -6
     5    -5     5
```

```
% ------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 3
% ------------------------------------------------------------------------
C=[3 -1 8; -4 3 9; 5 -2 -6]
C =
     3    -1     8
    -4     3     9
     5    -2    -6

p=[0; 1; 0]
p =
     0
     1
     0

E=eye(3)
E =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

P=[0 1 0; 1 0 0; 0 0 -1]
P =
     0     1     0
     1     0     0
     0     0    -1

E*C
ans =
     3    -1     8
    -4     3     9
     5    -2    -6

C*E
ans =
     3    -1     8
    -4     3     9
     5    -2    -6

E*p
ans =
     0
     1
     0

C*p
ans =
    -1
     3
    -2

p'*C
ans =
    -4     3     9

C*P
ans =
    -1     3    -8
     3    -4    -9
    -2     5     6

P*C
ans =
    -4     3     9
     3    -1     8
    -5     2     6


% ------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 4
% ------------------------------------------------------------------------

s=[15; 8]
s =
    15
     8

t=[-8; 16]
t =
    -8
    16

% a) ---------------------------------------------------------------------

norm(s)
ans =
    17

norm(t)
ans =
   17.8885

Norm__s_plus_t=norm(s+t)
Norm__s_plus_t =
    25

Norm_s_plus_Norm_t=norm(s)+norm(t)
Norm_s_plus_Norm_t =
   34.8885

fprintf('\nDreiecksungleichung '),
if Norm__s_plus_t<=Norm_s_plus_Norm_t, fprintf('erfüllt\n\n'),
 else fprintf('nicht erfüllt\n\n'),
end

Dreiecksungleichung erfüllt

% b) ---------------------------------------------------------------------

arc=acos(s'*t/(norm(s)*norm(t)))
arc =
    1.5445

Winkel_in_Grad=arc*180/pi
Winkel_in_Grad =
   88.4926
```

```
% --------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 5
% --------------------------------------------------------------------

u=[1; 2; -1]
u =
     1
     2
    -1

v=[-2; 3; 0]
v =
    -2
     3
     0

z1=-u-v; z2=-u;  z3=-u+v;
z4=  -v; z5=0*v; z6=   v;
z7= u-v; z8= u;  z9= u+v;

hold on;

plot3([0,z1(1)],[0,z1(2)],[0,z1(3)],'LineWidth',3);
plot3([0,z2(1)],[0,z2(2)],[0,z2(3)],'LineWidth',3);
plot3([0,z3(1)],[0,z3(2)],[0,z3(3)],'LineWidth',3);
plot3([0,z4(1)],[0,z4(2)],[0,z4(3)],'LineWidth',3);
plot3([0,z5(1)],[0,z5(2)],[0,z5(3)],'LineWidth',3);
plot3([0,z6(1)],[0,z6(2)],[0,z6(3)],'LineWidth',3);
plot3([0,z7(1)],[0,z7(2)],[0,z7(3)],'LineWidth',3);
plot3([0,z8(1)],[0,z8(2)],[0,z8(3)],'LineWidth',3);
plot3([0,z9(1)],[0,z9(2)],[0,z9(3)],'LineWidth',3);

plot3([z1(1),z3(1)],[z1(2),z3(2)],[z1(3),z3(3)],'-.k');
plot3([z3(1),z9(1)],[z3(2),z9(2)],[z3(3),z9(3)],'-.k');
plot3([z9(1),z7(1)],[z9(2),z7(2)],[z9(3),z7(3)],'-.k');
plot3([z7(1),z1(1)],[z7(2),z1(2)],[z7(3),z1(3)],'-.k');

xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z');
grid on

% ggf. von Hand in gewünschte Lage drehen,
% mit der folgenden Anweisung wird Betrachterstandpunkt vorgegeben:
view(66,36)

viewparam=get(gca(),'view');
title(['Plot von Vorname1 Name1 und Vorname2 Name2, azimuth=',num2str(
viewparam(1)),' elevation=',num2str(viewparam(2))]);
print -depsc ak3_zusatz_5a.eps

view(8,51)

viewparam=get(gca(),'view');
title(['Plot von Vorname1 Name1 und Vorname2 Name2, azimuth=',num2str(
viewparam(1)),' elevation=',num2str(viewparam(2))]);
print -depsc ak3_zusatz_5b.eps

diary off
```