Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

26. November 2008

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 3: Vektoren, Matrizen

Letzter Abgabetermin: 15. Dezember 2008
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 3“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die Dimension der linearen Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$! Was stellt diese Menge geometrisch dar?

   b) Gehören die Vektoren $\begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ der linearen Hülle an?

2. Für welche Werte des Parameters a handelt es sich bei der Menge
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 14 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$ um einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$?
Geben Sie in diesen Fällen die Dimension des Unterraumes an!

3. Sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:
a) $\boldsymbol{A}\vec{x} + \vec{y}$, b) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A} + \vec{x}$, c) $\vec{y}\boldsymbol{A}\vec{x}$, d) $\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{x}$, e) $\vec{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A}\vec{y}$, f) $\vec{x}^{\mathsf{T}}(\vec{y}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{A})^{\mathsf{T}}$, g) $\boldsymbol{A}\vec{x}\vec{y}^{\mathsf{T}}$, h) $\boldsymbol{A}^{\mathsf{T}}\vec{y}\vec{x}^{\mathsf{T}}$!

4. Was bewirkt die Multiplikation einer dreizeiligen Matrix von links mit
a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

5. Es werden drei Produkte P_1, P_2 und P_3 aus drei Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und diese aus drei Ausgangsstoffen R_1, R_2 und R_3 gefertigt, wobei im Einzelnen folgender Bedarf besteht:

	je P_1	je P_2	je P_3
B_1	3	4	2
B_2	0	3	3
B_3	3	3	5

	R_1	R_2	R_3
je B_1	1	2	4
je B_2	3	1	3
je B_3	2	2	1

   a) Stellen Sie dar, wie sich aus den beiden gegebenen Matrizen die Aufwandsmatrix für den Bedarf an Ausgangsstoffen je Endprodukt errechnet und führen Sie diese Berechnung aus!
   b) Bestimmen Sie mithilfe der bei a) ermittelten Aufwandsmatrix den Bedarf an Ausgangsstoffen, der für die Herstellung von 100 Produkten P_1, 200 Produkten P_2 und 400 Produkten P_3 erforderlich ist!

Zusatzaufgabe auf Seite 2

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha = 3.$$
   a) Berechnen Sie $A+B$, $A-B$, αA, $A\vec{w}$, $AB\vec{w}$, $\vec{w}^\top$, $A^\top$, $B^\top$, $A^\top\vec{w}$ und $\left(A^\top\right)^\top$.
   b) Berechnen Sie AB, BA, $(A+B)^\top$, $A^\top + B^\top$, $(\alpha A)^\top$, $\alpha A^\top$, $(AB)^\top$, $B^\top A^\top$ sowie $A^\top B^\top$. Überzeugen Sie sich für dieses Beispiel von der Nichtkommutativiät der Multiplikation (Beispiel 2.25 (b) der Vorlesung) und den Rechenregeln für das Transponieren (Satz 2.26 (f)-(h) der Vorlesung).
2. Lösen Sie obige Aufgabe 3 mit Hilfe von `MATLAB`. Geben Sie dabei alle Ausdrücke von a) bis h) ein.
3. Es sei
   $$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 \\ -4 & 3 & 9 \\ 5 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   Berechnen Sie EC, CE, $E\vec{p}$, $C\vec{p}$, $\vec{p}^\top C$, CP und PC. (Überlegen Sie sich vor der Befehlseingabe, welche Ergebnisse zu erwarten sind.)
4. Weiter sei
   $$\vec{s} = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{t} = \begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix}.$$
   a) Berechnen Sie $\|\vec{s}\|$, $\|\vec{t}\|$, $\|\vec{s}+\vec{t}\|$, $\|\vec{s}\| + \|\vec{t}\|$. Überzeugen Sie sich davon, dass die Dreiecksungleichung (Satz 2.16 (g) der Vorlesung) erfüllt ist.
   b) Berechnen Sie den Winkel Zwischen $\vec{s}$ und $\vec{t}$. Geben Sie den Winkel sowohl in Bogenmaß als auch in Grad an.
   Hinweis: Die `arccos`-Funktion heißt in `MATLAB` `acos`.
5. Es sei
   $$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
   Stellen Sie die lineare Hülle grafisch dar. Plotten Sie dazu die neun Linearkombinationen
   $$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$
   für $\alpha, \beta \in \{-1, 0, 1\}$ in einen Plot. Drehen Sie die Ansicht so, dass zu erkennen ist, dass alle Vektoren in einer Ebene liegen. Geben Sie dem Plot einen Titel, der die Namen der Mitglieder Ihrer Hausaufgabengruppe enthält.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur MATLABaufgabe

Matrizen und Vektoren

In MATLAB wird nicht zwischen einem Vektor und einer Matrix unterschieden. Spalten-/ Zeilenvektoren sind Matrizen mit nur einer Spalte/Zeile. Matrizen werden in eckigen Klammern zeilenweise eingegeben. Hierbei wird das Zeilenende mit einem Semikolon angezeigt. Die Einträge in einer Zeile können mit einem Komma abgetrennt werden. Der folgende Befehl erzeugt die beiden Matrizen A und B aus Beispiel 2.25 aus der Vorlesung.

```
≫ A=[2 1 3; -1 0 1]
≫ B=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
```

Analog ergibt sich die Eingabe eines Spaltenvektors als Eingabe einer Matrix mit nur einer Spalte. Beispiel:

```
≫ v=[-3; 4; 7]
≫ w=[-2; -3; 1]
```

Vektoren können genutzt werden, um daraus Matrizen zu erzeugen. Beispiel:

```
≫ C=[v w [1; -1; 4]]
```

Ein Zugriff auf einen Eintrag geschieht durch die Angabe der Zeilen- und Spaltennummer. Beispiel:

```
≫ A(2,3)
≫ v(3)
≫ v(3)=5
≫ v
```

Um auf eine ganze Zeile/Spalte zugreifen, verwendet man einen Doppelpunkt. Beispiel:

```
≫ A(:,3)
≫ A(1,:)
```

Die Einheitsmatrix der Größe 3×3 und die Nullmatrix der Größe 2×3 lassen sich wie folgt erzeugen.

```
≫ E=eye(3)
≫ Z=zeros(2,3)
```

Das Rechnen mit Matrizen funktioniert mit den „natürlichen“ Rechenzeichen. Beispiel:

```
≫ B+C
≫ 2*A
≫ B*v
≫ A*B
```

Das Transponieren einer Matrix wird mit einem Hochkomma realisiert. Beispiel:

```
≫ A'
≫ B'
≫ v'
≫ B'*A'
```

Die Norm (Länge) eines Vektors kann mit der Funktion `norm` berechnet werden. Beispiel:

```
≫ norm(v)
```

Um einen 2- bzw. 3-dimensionalen Vektor darzustellen, kann man beispielsweise die Verbindungslinie vom Koordinatenursprung $\vec{0}$ nach $\vec{v}$ mit dem Befehl `plot` bzw. `plot3` zeichnen. Der Befehl

```
≫ plot3( [0, v(1)] , [0, v(2)] , [0, v(3)] )
```

bildet den Vektor `v` ab. Mit ≫ `grid on` kann man die Darstellung verbessern.