

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 1: Grundlagen

Letzter Abgabetermin: 04. November 2008

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Am 01.01.2008 wurden die monatlichen Tabellenentgelte der Beschäftigten der ostdeutschen Länder in den unteren Entgeltgruppen von 92,5 % auf 100 % der bisherigen Westentgelte erhöht, die ihrerseits aber zum gleichen Termin um 2,9 % erhöht wurden. Letztere Erhöhung wurde dann im Osten am 01.05.2008 nachgeholt.
 - a) Wie groß war die relative Erhöhung der Entgelte der genannten Beschäftigten am 01.01.2008, wie hoch war sie am 01.05.2008?
 - b) Um wieviel Prozent war das Maientgelt 2008 gegenüber dem Dezemberentgelt 2007 gestiegen?
 - c) Wieviel Prozent des Westentgelts bezogen die genannten Beschäftigten von Januar bis April 2008?

2. Auf einer 152 km langen Straße von A nach B fährt 12.00 Uhr von A ein Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h in Richtung B und 12.30 Uhr von B ein Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h in Richtung A. Wann begegnen sich die beiden Fahrzeuge?

3. Es gelte die Implikation „Personen, die nicht volljährig sind, dürfen nicht wählen“. Aus welchen der folgenden Aussagen können aufgrund dieser Implikation Folgerungen gezogen werden, wenn ja, welche?
 - a) Die Person ist volljährig.
 - b) Die Person ist nicht volljährig.
 - c) Die Person darf wählen.
 - d) Die Person darf nicht wählen.
 - e) Alle Personen einer Gruppe sind volljährig.
 - f) Alle Personen einer Gruppe sind nicht volljährig.
 - g) Einige Personen einer Gruppe sind volljährig, einige nicht.
 - h) Alle Personen einer Gruppe dürfen wählen.
 - i) Alle Personen einer Gruppe dürfen nicht wählen.
 - j) Einige Personen einer Gruppe dürfen wählen, einige nicht.

4. Gegeben seien folgende Größen:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-2	2	3	1	0	4
c_{1j}	5	4	3	2	1	0
c_{2j}	5	6	7	8	9	10
c_{3j}	0	-1	2	1	-2	3

Berechnen Sie

$$\sum_{i=0}^5 x_i, \quad \sum_{k=0}^3 (x_k + 2), \quad \sum_{k=0}^3 x_{k+2}, \quad \sum_{k=0}^3 kx_k, \quad \sum_{k=0}^3 x_1,$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^5 c_{ij}, \quad \sum_{j=1}^5 c_{1j}x_j, \quad \sum_{k=1}^3 c_{1k}c_{3k}, \quad \sum_{k=1}^3 c_{k1}c_{k3} !$$

5. An einer Klausur, bei der 40 Punkte zu erreichen waren und bei der nur ganzzahlige Punkte vergeben wurden, nahmen Studenten aus 6 verschiedenen Studiengängen teil. Zum Bestehen waren 16 Punkte erforderlich. Es bezeichne a_{ij} die Anzahl der Studenten des Studienganges i ($i = 1, 2, \dots, 6$), die j Punkte erreichten. Drücken Sie folgende Sachverhalte mithilfe des Summenzeichens aus:

b.w.

- a) An der Klausur nahmen insgesamt 411 Studenten teil.
- b) 222 Teilnehmer haben die Klausur nicht bestanden.
- c) 3 Klausurteilnehmer schafften keinen einzigen Punkt.
- d) 86 Klausurteilnehmer gehörten zum Studiengang 3.
- e) Vom Studiengang 5 haben 52 Teilnehmer bestanden.
- f) 43,1 % der Teilnehmer aus dem Studiengang 6 haben die Klausur nicht bestanden.
- g) Die Teilnehmer aus dem Studiengang 1 erreichten durchschnittlich 15,1 Punkte.

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Zulassungsvoraussetzung für die Prüfungsleistung zu Höhere Mathematik I.1 ist gemäß Studienordnung das Bestehen von 4 der 5 Aufgabenkomplexe. Bitte beachten Sie, dass es im laufenden Semester keine Möglichkeit gibt, Aufgabenkomplexe nachträglich zu bestehen.

Arbeiten Sie sich (z.B. mithilfe der folgenden Einführung) in das Computernumeriksystem MATLAB ein und lösen Sie damit dann die folgenden Aufgaben. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.



1. Berechnen Sie $\sin \frac{\pi}{6}$, $\sqrt[3]{42}$ (also $42^{\frac{1}{3}}$) und e^π (also $\exp(\pi)$).
2. Plotten Sie die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2$ im Intervall $[-1.2, 3.4]$. Geben Sie dem Plot einen Titel und beschriften Sie auch die Achsen entsprechend.
3. Bestimmen Sie unter Verwendung des Befehls `roots` (siehe `>> help roots`) die Nullstellen des Polynoms $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2$. Vergleichen Sie mit dem Plot von oben.
Hinweis: `>> roots([1, -2, -3])` bestimmt die Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
4. Plotten Sie die Funktion $g(x) = 2 \sin(5x)$ in dasselbe Fenster wie $f(x)$. Verwenden Sie dabei eine andere Farbe. Passen Sie den Titel an und erstellen Sie eine Legende (`>> help legend`).

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Einführung in MATLAB

Das System MATLAB wird vom URZ bereitgestellt. Sämtliche Beispiele dieser Einführung mit Ausnahme des Befehls `ezplot` funktionieren genauso mit der freien Software Octave. Für diese gibt es z.B. auch die Windows-Downloadversion `octave-3.0.1-vs2008-setup.exe`.

Starten Sie MATLAB und geben Sie die folgenden Befehle ein. Beobachten Sie sorgfältig die Bildschirmausgabe und achten Sie auf die Bedeutung von `,` und `;`.

Tipp: mit den Cursortasten   kann man die vorherigen Eingabezeilen „zurückholen“ und ändern.

```
>> 23+19
>> 3*4
>> 3*4,
>> 3*4;
>> a=3*4;
>> a
>> a;
>> sqrt(2)
>> help sqrt
>> pi
>> help pi
>> radius=2, durchmesser=2*radius, umfang=durchmesser*pi
>> radius=2, durchmesser=2*radius; umfang=durchmesser*pi
>> radius=2, durchmesser=2*radius umfang=durchmesser*pi
```

Mit dem Befehl

```
>> pwd
```

(`pwd` steht für „**p**rint **w**orking **d**irectory“) können Sie sich Ihr aktuelles Arbeitsverzeichnis anzeigen lassen. Es empfiehlt sich, für jeden Hausaufgabenkomplex ein eigenes Verzeichnis anzulegen. Dies kann beispielsweise durch die folgenden beiden Befehle realisiert werden:

```
>> mkdir Hausaufgabenkomplex1
>> cd Hausaufgabenkomplex1
>> pwd
```

Geben Sie nun die folgenden Befehle ein:

```
>> help diary
>> diary hal.txt
```

Alle ab jetzt eingegebenen Befehle werden mitsamt ihrer Ausgabe in die Datei `hal.txt` im aktuellen Arbeitsverzeichnis geschrieben. Dies eignet sich besonders, um Ihre Lösung der Hausaufgabe zu dokumentieren.

Ein Plot der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ auf dem Intervall $[-1, 2]$ kann wie folgt angefertigt werden. Beobachten Sie den Einfluss des Parameters n .

```
>> n=5
>> help linspace
>> x=linspace(-1,2,n)
>> F=x.^3-2*x.^2+1
```

Die komponentenweise Ausführung von Operationen für Vektoren, wie sie z.B. hier zur Be-

rechnung von Werten einer Funktion an mehreren Stellen benötigt wird, wird in MATLAB durch einen Punkt vor dem Operationszeichen veranlasst. $[3 \ 7].*[5 \ 8]$ ergibt also z.B. $[15 \ 56]$. Dabei handelt es sich um keine der bekannten Produktbildungen aus der Vektorrechnung.

```
>> plot(x,F);
>> title('Plot von f(x)=x^3-2*x^2+1 mit n=5');
>> xlabel('x'); ylabel('f(x)'); grid on;
>> n=100
>> x=linspace(-1,2,n)
>> F=x.^3-2*x.^2+1
>> help hold
>> hold on
>> plot(x,F,'o-r');
>> title('Plot von f(x)=x^3-2*x^2+1 mit n=5 und n=100');
>> print -dpng hal.png
>> print -depsc hal.eps
```

Im Gegensatz zu der verpixelten png-Grafik wurde mit dem letzten Befehl eine Vektorgrafik erzeugt. Allerdings wird für deren Anzeige ein Postscript-Interpreter (z.B. Ghostscript) benötigt. Dieser ist auf den URZ-Rechnern installiert.

```
>> hold off
>> plot(x,F,'-.k');
>> clf
```

Einfache Plots lassen sich auch mit der Funktion `ezplot` (sprich: „easy plot“) erstellen:

```
>> help ezplot
>> ezplot('x.^3-2*x.^2+1',[-1,2])
```

Auch Summen lassen sich leicht berechnen:

```
>> x=[-2, 2, 3, 1, 0, 4]
>> sum(x)
>> x+2
>> sum(x+2)
```

Die folgenden Befehlen müssen nicht vollständig verstanden werden, sie sollen lediglich aufzeigen, dass mit wenig Aufwand komplizierte Funktionen in eine ansprechende Darstellung gebracht werden können.

```
>> x=-8:0.5:8; y=x;
>> [X,Y]=meshgrid(x,y);
>> R=sqrt(X.^2+Y.^2)+eps;
>> Z=sin(R)./R;
>> mesh(Z);
>> title('Mesh-Plot von sin(sqrt(x^2+y^2))/sqrt(x^2+y^2)')
>> surf(Z);
>> title('Surf-Plot von sin(sqrt(x^2+y^2))/sqrt(x^2+y^2)')
```

Um das Protokollieren in die Datei `hal.txt` zu beenden, verwenden Sie den folgenden Befehl.

```
>> diary off
```

Schauen Sie sich den Inhalt der Datei `hal.txt` an, um die Funktionsweise des `diary`-Befehls genau zu verstehen.

Aufgabenkomplex 1: Grundlagen**Letzter Abgabetermin: 04. November 2008**

1. Am 01.01.2008 wurden die monatlichen Tabellenentgelte der Beschäftigten der ostdeutschen Länder in den unteren Entgeltgruppen von 92,5 % auf 100 % der bisherigen Westentgelte erhöht, die ihrerseits aber zum gleichen Termin um 2,9 % erhöht wurden. Letztere Erhöhung wurde dann im Osten am 01.05.2008 nachgeholt.

- Wie groß war die relative Erhöhung der Entgelte der genannten Beschäftigten am 01.01.2008, wie hoch war sie am 01.05.2008?
- Um wieviel Prozent war das Maientgelt 2008 gegenüber dem Dezemberentgelt 2007 gestiegen?
- Wieviel Prozent des Westentgelts bezogen die genannten Beschäftigten von Januar bis April 2008?

Lösung:

a) 01.01.2008: $\frac{1}{0.925} \approx 1.0811 = \frac{108.11}{100}$: Erhöhung um 8,11 %

01.05.2008: Erhöhung um 2,9 %

b) $\frac{1.029}{0.925} \approx 1.1124 = \frac{111.24}{100}$: Erhöhung um 11,24 %

c) $\frac{1}{1.029} \approx 0.9718 = \frac{97.18}{100}$: 97,18 % des Westentgelts

2. Auf einer 152 km langen Straße von A nach B fährt 12.00 Uhr von A ein Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h in Richtung B und 12.30 Uhr von B ein Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h in Richtung A. Wann begegnen sich die beiden Fahrzeuge?

Lösung:

Sei t die seit 14.00 Uhr vergangene Zeit, dann muss zum Begegnungszeitpunkt gelten:

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h}} t = 152 \text{ km} - 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} \left(t - \frac{1}{2} \text{ h} \right), \quad 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} t = 152 \text{ km} - 70 \frac{\text{km}}{\text{h}} t + 35 \text{ km},$$

$$170 \frac{\text{km}}{\text{h}} t = 187 \text{ km}, \quad t = \frac{187 \text{ km}}{170 \text{ km/h}} = \frac{11}{10} \text{ h} = 66 \text{ min.}$$

Die Fahrzeuge treffen sich also um 13.06 Uhr.

3. Es gelte die Implikation „Personen, die nicht volljährig sind, dürfen nicht wählen“. Aus welchen der folgenden Aussagen können aufgrund dieser Implikation Folgerungen gezogen werden, wenn ja, welche?

- Die Person ist volljährig.
- Die Person ist nicht volljährig.
- Die Person darf wählen.
- Die Person darf nicht wählen.
- Alle Personen einer Gruppe sind volljährig.
- Alle Personen einer Gruppe sind nicht volljährig.

- g) Einige Personen einer Gruppe sind volljährig, einige nicht.
- h) Alle Personen einer Gruppe dürfen wählen.
- i) Alle Personen einer Gruppe dürfen nicht wählen.
- j) Einige Personen einer Gruppe dürfen wählen, einige nicht.

Lösung:

- a) Nein.
- b) Ja: Die Person darf nicht wählen.
- c) Ja: Die Person ist volljährig.
- d) Nein.
- e) Nein.
- f) Ja: Alle Personen der Gruppe dürfen nicht wählen.
- g) Ja: Einige Personen der Gruppe dürfen nicht wählen. (Ob einige wählen dürfen, ist aber nicht bekannt.)
- h) Ja: Alle Personen der Gruppe sind volljährig.
- i) Nein.
- j) Ja: Einige Personen der Gruppe sind volljährig. (Ob einige nicht volljährig sind, ist aber nicht bekannt.)

4. Gegeben seien folgende Größen:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-2	2	3	1	0	4
c_{1j}	5	4	3	2	1	0
c_{2j}	5	6	7	8	9	10
c_{3j}	0	-1	2	1	-2	3

Berechnen Sie

$$\sum_{i=0}^5 x_i, \quad \sum_{k=0}^3 (x_k + 2), \quad \sum_{k=0}^3 x_{k+2}, \quad \sum_{k=0}^3 kx_k, \quad \sum_{k=0}^3 x_1,$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^5 c_{ij}, \quad \sum_{j=1}^5 c_{1j}x_j, \quad \sum_{k=1}^3 c_{1k}c_{3k}, \quad \sum_{k=1}^3 c_{k1}c_{k3} !$$

Lösung:

$$\sum_{i=0}^5 a_j = -2 + 2 + 3 + 1 + 0 + 4 = 8, \quad \sum_{k=0}^3 (x_k + 2) = \sum_{k=0}^3 a_k + \sum_{k=0}^3 2 = 4 + 8 = 12, \quad \sum_{k=0}^3 a_{k+2} = \sum_{i=2}^5 a_i = 8,$$

$$\sum_{k=0}^3 kx_k = 0x_0 + 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11, \quad \sum_{k=0}^3 x_1 = x_1 + x_1 + x_1 + x_1 = 8$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=0}^5 c_{ij} = \sum_{i=1}^3 (c_{i0} + c_{i1} + c_{i2} + c_{i3} + c_{i4} + c_{i5}) = 15 + 45 + 3 = 63,$$

$$\sum_{j=1}^5 c_{1j}x_j = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 19,$$

$$\sum_{k=1}^3 c_{1k}c_{3k} = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4, \quad \sum_{k=1}^3 c_{k1}c_{k3} = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 8 + (-1) \cdot 1 = 55$$

5. An einer Klausur, bei der 40 Punkte zu erreichen waren und bei der nur ganzzahlige Punkte vergeben wurden, nahmen Studenten aus 6 verschiedenen Studiengängen teil. Zum Bestehen waren 16 Punkte erforderlich. Es bezeichne a_{ij} die Anzahl der Studenten des Studienganges i ($i = 1, 2, \dots, 6$), die j Punkte erreichten. Drücken Sie folgende Sachverhalte mithilfe des Summenzeichens aus:

- An der Klausur nahmen insgesamt 411 Studenten teil.
- 222 Teilnehmer haben die Klausur nicht bestanden.
- 3 Klausurteilnehmer schafften keinen einzigen Punkt.
- 86 Klausurteilnehmer gehörten zum Studiengang 3.
- Vom Studiengang 5 haben 52 Teilnehmer bestanden.
- 43,1 % der Teilnehmer aus dem Studiengang 6 haben die Klausur nicht bestanden.
- Die Teilnehmer aus dem Studiengang 1 erreichten durchschnittlich 15,1 Punkte.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{i=1}^6 \sum_{j=0}^{40} a_{ij} &= 411, & \text{b) } \sum_{i=1}^6 \sum_{j=0}^{15} a_{ij} &= 222, & \text{c) } \sum_{i=1}^6 a_{i0} &= 3, & \text{d) } \sum_{j=0}^{40} a_{3j} &= 86, & \text{e) } \sum_{j=16}^{40} a_{5j} &= 52, \\ \text{f) } \frac{\sum_{j=0}^{15} a_{6j}}{\sum_{j=0}^{40} a_{6j}} &= 0.431, & \text{g) } \frac{\sum_{j=0}^{40} j a_{1j}}{\sum_{j=0}^{40} a_{1j}} &= 15.1 \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe

Arbeiten Sie sich (z.B. mithilfe der folgenden Einführung) in das Computernumeriksystem MATLAB ein und lösen Sie damit dann die folgenden Aufgaben. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

- Berechnen Sie $\sin \frac{\pi}{6}$, $\sqrt[3]{42}$ (also $42^{\frac{1}{3}}$) und e^{π} (also $\exp(\pi)$).
- Plotten Sie die Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2$ im Intervall $[-1.2, 3.4]$. Geben Sie dem Plot einen Titel und beschriften Sie auch die Achsen entsprechend.
- Bestimmen Sie unter Verwendung des Befehls `roots` (siehe \gg `help roots`) die Nullstellen des Polynoms $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2$. Vergleichen Sie mit dem Plot von oben.
Hinweis: \gg `roots([1, -2, -3])` bestimmt die Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
- Plotten Sie die Funktion $g(x) = 2 \sin(5x)$ in dasselbe Fenster wie $f(x)$. Verwenden Sie dabei eine andere Farbe. Passen Sie den Titel an und erstellen Sie eine Legende (\gg `help legend`).

Öffnen Sie die erstellte diary-Datei (vorher mit \gg `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete diary-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Lösung:

Ausdruck siehe nächste Seite

Die bei Aufgabe 3 ermittelten Nullstellen 3.1149, -0.8608 und 0.7459 sind tatsächlich die der blauen Kurven in den Plots.

```

% -----
% Aufgabe 1
% -----
sin(pi/6)

ans =

    0.5000

42^(1/3)

ans =

    3.4760

exp(pi)

ans =

    23.1407

% -----
% Aufgabe 2
% -----
n=100;
x=linspace(-1.2,3.4,n);
F=-x.^3+3*x.^2+x-2;
plot(x,F);
title('Plot von f(x)=-x^3+3*x^2+x-2');
xlabel('x'); ylabel('f(x)'); grid on;
print -depsc ak1_zusatz_2.eps

% -----
% Aufgabe 3
% -----
roots([-1,3,1,-2])

ans =

    3.1149
   -0.8608
    0.7459

% -----
% Aufgabe 4
% -----
hold on;
G=2*sin(5*x);
plot(x,G,'r');
title('Plot von f(x) und g(x)');
ylabel('y');
legend('f(x)=-x^3+3*x^2+x-2','g(x)=2*sin(5*x)');
print -depsc ak1_zusatz_4.eps
diary off

```

15.10.2008

diary (nachbearbeitet)

