Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Roland Griesse
Fakultät für Mathematik Jacqueline Pecher, Albrecht Eckardt

Ergänzungskurs Elementarmathematik für Maschinenbauer WS2008/2009

5. Übungsblatt

Vektorräume

1. Gegeben seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   a) Welche der folgenden Mengen von Vektoren bilden eine Basis im $\mathbb{R}^3$?
      i) $\{u,\ v,\ w,\ x\}$
      ii) $\{u,\ v,\ y\}$
      iii) $\{u,\ w,\ x\}$
      iv) $\{w,\ v,\ y\}$
   b) Welche Dimension hat der Untervektorraum, der von den Vektoren v, x, y aufgespannt wird?

2. Sind die folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume?

   a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ x+2y \\ x \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$,
   b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1+x+y \\ x+2y \\ x \end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$,
   c) Ebenen durch den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. Zeigen Sie, dass folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume sind und finden Sie eine Basis:

   a) Alle Vektoren, deren Komponentensumme 0 ist.
   b) Alle Vektoren, die orthogonal zu $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 1)$ sind.

4. Zeigen Sie, dass die Menge der oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen ein Untervektorraum im Vektorraum $\mathbb{R}^{n \times n}$ bildet.

5. Seien u, v zwei orthogonale Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\{u,\ v,\ u \times v\}$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$ ist.

Analytische Geometrie

1. Eine Gerade g sei durch die Punkte

$$x_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   gegeben. Geben Sie eine Parameterdarstellung von g an. Welchen Abstand hat die Gerade g vom Nullpunkt?

2. Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der beiden Geraden

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3. Welche Abstände besitzen die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   von der Ebene $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2 = 0$?

4. Ein schräges Dach ist Teil einer Ebene durch die Punkte $P(0; 0; 3)$, $Q(0; 6; 6)$, $R(-5; 6; 6)$. In $L(-4; -2; 12)$ befindet sich eine Punktlichtquelle

   a) Bestimmen Sie den Punkt S des Daches, der von der Lampe am stärksten beleuchtet wird. (Je weiter ein Punkt von der Lichtquelle entfernt ist, um so schwächer wird er beleuchtet.)

   b) Der Punkt $E(-2.5; 1.5; 5.5)$ ist das obere Ende einer Stange von vernachlässigbarer Dicke, die mit dem anderen Ende auf der Dachfläche befestigt ist und parallel zur z-Achse ausgerichtet ist.
   Berechnen Sie den Schatten, den die Stange auf das Dach wirft.

5. Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(0; 4; 0)$, $B(1; 1; 0)$ und $C(4; 5; 0)$ in der x-y-Ebene.

   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle ABC$.

   b) Geben Sie die Gleichung der Geraden g an, auf der die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{AB}$ liegt (Die Mittelsenkrechte einer Dreiecksseite steht senkrecht auf dieser Seite und halbiert diese).

   c) Die Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten schneiden sich im Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks. Berechnen Sie M für das Dreieck $\triangle ABC$.