Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Roland Griesse
Fakultät für Mathematik Jacqueline Pecher, Albrecht Eckardt

Ergänzungskurs Elementarmathematik für Maschinenbauer WS2008/2009

4. Übungsblatt

komplexe Zahlen

1. Sei $z = re^{i\varphi}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge (in Realteil und Imaginärteil) und skizzieren Sie diese:
$$a)\quad |z-1| = 1 \qquad b)\quad \varphi = \tfrac{\pi}{4}.$$
2. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 4\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ und $z_2 = 2 + 2\,\mathrm{i}$. Berechnen Sie das Argument von $\frac{z_2}{z_1}$ und den Betrag von $z_1 z_2$.
3. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen für z, wenn $z^4 + 1 = 0$.

Inverse Matrizen

1. Bestimmen Sie, wenn möglich, die Inversen der Matrizen:
$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$
$$d)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad f)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 8 \\ -9 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$
2. Für welche Werte von t besitzt A $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Inverse?

Determinanten

1. Berechnen Sie von folgenden Matrizen die Determinanten!
$$a)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \quad c)\ \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \quad d)\ \begin{pmatrix} 3^t & 2^t \\ 3^{t-1} & 2^{t-1} \end{pmatrix}$$
2. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ mit dem Entwicklungssatz und mit der Regel von Sarrus!
3. Berechnen Sie die Determinanten so schnell wie möglich!
$$a)\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & -6 & -9 & -12 \end{pmatrix}$$

4. Berechnen Sie die Determinante von AB, wenn

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Rang der Matrix

1. Bestimmen Sie den Rang der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit der Parameter $x, y, z \in \mathbb{R}$.

2. Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen

$$a)\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad b)\quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lineare Unabhängigkeit

1. Ist das folgende System von Vektoren linear unabhängig?

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Bestimmen Sie die Dimension der linearen Hülle folgender Vektoren in Abhängigkeit des Parameters a!

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Handelt es sich bei folgenden Mengen um Unterräume des $\mathbb{R}^2$

$$a)\quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 4x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \quad b)\quad \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x-5 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Gegeben seien die Vektoren $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie die Länge der Vektoren und überprüfen Sie dafür die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung!

5. Welche dieser Paare von Vektoren sind orthogonal?

$$a)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b)\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c)\quad \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$