

4. Übungsblatt

**Vektoren**

1. Ist das folgende System von Vektoren linear unabhängig?

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Bestimmen Sie die Dimension der linearen Hülle folgender Vektoren in Abhängigkeit von  $a$ !

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$$

3. Handelt es sich bei folgenden Mengen um Unterräume des  $\mathbb{R}^2$

$$a) \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 4x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \quad b) \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x - 5 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Gegeben seien die Vektoren  $a = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ . Berechnen Sie die Länge der Vektoren und überprüfen Sie die Cauchy Schwarzsche Ungleichung!

5. Welche dieser Paare von Vektoren sind orthogonal?

$$a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Matrizen**

1. Konstruieren Sie folgende Matrizen!

$$a) \quad 4 \times 3 \text{ Matrix } A = (a_{ij})_{4 \times 3} \text{ mit } a_{ij} = 2i - j$$
$$b) \quad 3 \times 3 \text{ Matrix } B = (b_{ij})_{3 \times 3} \text{ mit } b_{ii} = 1 \text{ und } b_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

2. Formulieren Sie in Matrixschreibweise!

$$3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 5$$
$$5x_1 + x_2 + 2x_3 = -2$$

3. Gegeben seien die Matrizen  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$   
 und  $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

- a) Berechnen Sie die Ausdrücke  $A+B$ ,  $3A$  und  $-\frac{1}{2}B$ !
- b) Transponieren Sie die Matrizen  $A$  und  $D$ !
- c) Berechnen Sie, wenn möglich  $CD$  und  $DC$ !
- d) Sei nun  $A$  eine  $m \times n$  Matrix und  $B$  eine zweite Matrix, sodass  $AB$  und  $BA$  definiert sind. Welche Ordnung muss  $B$  haben?

4. Die Unternehmen  $A$ ,  $B$  und  $C$  teilen sich 2006 den Markt für ein bestimmtes Produkt. Unternehmen  $A$  hält 20% des Marktes,  $B$  60% und  $C$  20%. Im Laufe des nächsten Jahres verändert sich die Verteilung folgendermaßen:

$A$  behält 85% seiner Kunden, verliert 5% an  $B$ , 10% an  $C$ .

$B$  behält 55% seiner Kunden, verliert 10% an  $A$ , 35% an  $C$ .

$C$  behält 85% seiner Kunden, verliert 10% an  $A$ , 5% an  $B$ .

Stellen Sie die Übergangsmatrix  $T$  mit  $T = (t_{ij})_{3 \times 3}$ , wobei  $t_{ij}$  den Prozentsatz der Kunden von  $j$  darstellt, die in der nächsten Periode Kunden von  $i$  werden. Wie groß ist der Anteil der einzelnen Unternehmen ein Jahr später an dem Markt?

5. Zeigen Sie, dass  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  symmetrisch ist!

6. Zeigen Sie: Wenn  $X$  eine beliebige reellwertige  $n \times m$  Matrix ist, dann ist  $XX^T$  und  $X^T X$  eine symmetrische Matrix!

7. Für welche Werte von  $a$  ist  $A = \begin{pmatrix} a & -a^2 & -3 \\ a-6 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & -1 \end{pmatrix}$  symmetrisch?