Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Roland Griesse
Fakultät für Mathematik Jacqueline Pecher, Albrecht Eckardt

Ergänzungskurs Elementarmathematik für Bachelor WS2008/2009

3. Übungsblatt

Das Rechnen mit Beträgen

Wiederholung der Rechengesetze

$$\begin{array}{rcl} |a| &=& \max\{a,-a\} \\ -|a| \le & a & \le |a| \\ |a-b| &=& |b-a| \\ |a|\le b &\Longleftrightarrow& -b\le a\le b \\ |a|\ge b &\Longleftrightarrow& a\ge b \ \vee a \ \le -b \\ |a\cdot b| &=& |a|\cdot|b| \\ ||a|-|b|| &\le& |a+b| \quad \le \quad |a|+|b|. \end{array}$$

1. Für welche reellen x gilt:

   $a)$ $|x-2|<1$ $b)$ $|x+1|\ge 4$, $c)$ $|2x+1|=|x+1|+1$, $d)$ $\ln|x+4|>1$?

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen:

   $a)$ $|x-2|<|x-3|$, $b)$ $3<|x+2|\le 5$, $c)$ $|x+2|+|x-2|\le 12$,

   $d)$ $||x-1|+x|+|x|<3$, $e)$ $|x+2|-|x|>1$, $f)$ $||x+1|-|x-1||<1$.

3. Ermitteln Sie die Lösungsmenge L folgender Ungleichungen und Ungleichungssysteme in zwei Variablen und stellen Sie L in einem xy-Koordinatensystem grafisch dar:

   $a)$ $(2x+y)(y-x+1)\ge 0$, $b)$ $x-2>2,\ x+y<4$, $c)$ $\dfrac{(x-1)(y+2)}{y-x}<0$,

   $d)$ $(x+a)^2+(y+b)^2\ge r^2$, $e)$ $|x-y|^2+|x+y|^2\le 1$, $f)$ $\dfrac{|x-1|}{|y+1|}\le 1$.

4. Stellen Sie die Lösungsmenge der Gleichung $y=2|x-1|-|x-2|$ grafisch dar.

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

1. Formen Sie die folgenden Ausdrücke derart um, dass keine negativen Exponenten mehr auftreten:

   $$a)\ \left(\frac{v^{-4}x^2}{u^{-6}y^{-4}}\right)^2 : \left(\frac{x^{-1}y^{-2}}{u^4v^{-3}}\right)^3,\quad b)\ \left[\left(\frac{1}{5^{-3}}\right)^{-2}\right]^{-3},\quad c)\ \left[\left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{z^{-3}}\right)^4\right]^{-2}.$$

2. Vereinfachen Sie:

   $$a)\ \frac{x+y}{z}\sqrt[3]{\frac{z^4-z^3x}{x^2+2xy+y^2}},\quad b)\ \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a^4-b^4}}\cdot\sqrt{a^2+b^2},\quad c)\ \frac{\sqrt[3]{a^4b}\cdot\sqrt[3]{a^2b^7}\cdot\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2b^5}},$$

   $$d)\ \sqrt[3]{a^2\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}},\quad e)\ \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt{\sqrt[6]{x^2}}\cdot\sqrt[12]{x^7},\quad f)\ \sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a}{b}}}}.$$

3. Formen Sie die folgenden Ausdrücke derart um, dass der Nenner rational wird

$$a)\quad \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-\sqrt{5}}\,, \qquad b)\quad \frac{4\sqrt{5}-\sqrt{30}}{\sqrt{12}+5\sqrt{2}}\,, \qquad c)\quad \frac{1}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}}\,,$$

$$d)\quad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}\,, \qquad e)\quad \frac{4+2\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}\,, \qquad f)\quad \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\,.$$

4. Formen Sie die Logarithmenausdrücke um bzw. bestimmen Sie x:

$$a)\quad \log_k \sqrt[m]{k}, \quad b)\quad \log_y y^{-n}, \quad c)\quad \ln \mathrm{e}^{-3}, \quad d)\quad \log_x \frac{1}{u} = -1, \quad e)\quad \log_4 x = \frac{1}{2}.$$

5. Fassen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze zusammen:

$$a)\quad \log_a u + \log_a v - \log_a w, \quad b)\quad x \ln u + y \ln v, \quad c)\quad \frac{1}{3}\log_k a - \frac{1}{5}\log_k b + \frac{2}{3}\log_k c.$$

Lösung von Wurzel-, Exponential- und Logarithmengleichungen

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$a)\quad \sqrt{5x-4} = 1 + \sqrt{3x+1}, \qquad b)\quad \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}},$$

$$c)\quad \sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3} = 0, \qquad d)\quad 4\sqrt[3]{6x-1} + 5 = 0,$$

$$e)\quad \mathrm{e}^{x^2-2\sqrt{x^2}} - \mathrm{e}^{-1} = 0, \qquad f)\quad 10^{2x} - 101\cdot 10^x + 100 = 0,$$

$$g)\quad \lg(x^2+10x-4) - \lg x - 1 = 0, \qquad h)\quad \frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3.$$

2. Lösen Sie die folgenden Formeln nach der angegebenen Variablen auf:

$$a)\quad Kq^n - \frac{q^n-1}{q-1} = 0 \quad \text{nach} \quad n, \qquad b)\quad Kq^n + (x-2)q^{-n} - c^2 = 0 \quad \text{nach} \quad q.$$

3. Lösen Sie die biquadratischen Gleichungen

$$a)\quad x^4 - 5x^2 + 4 = 0, \qquad b)\quad 10x^4 - x^2 - 21 = 0.$$