

Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.1

Zusammenfassung der 14. Vorlesung vom 03.02.2009

Definition 4.18 (Stetigkeit)

Gegeben sei ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ und ein Punkt $a \in I$ sowie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Die Funktion f heißt **stetig** im Punkt a , wenn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ existiert und gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- (b) Andernfalls heißt f **unstetig** im Punkt a .

- (c) Falls $f(x)$ in jedem Punkt $x \in I$ stetig ist, so heißt f stetig auf I .

Bemerkung

Eine Funktion ist stetig in einem Punkt a , wenn man sie in einer Umgebung von a zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.

Definition 4.20 (Differenzierbarkeit und Tangente)

- (c) Die Funktion f heißt **differenzierbar (diffbar)** im Punkt a , wenn der Grenzwert der Differenzenquotienten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{oder auch} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in \mathbb{R} existiert. Diesen Grenzwert nennen wir die **Ableitung** von f an der Stelle a , kurz: $f'(a)$ oder $\frac{d}{dx} f(x)|_{x=a}$ oder $\frac{df}{dx}(a)$.

- (e) Die Funktion (Gerade)

$$T_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

heißt die **Tangente** von f im Punkt a .

Beispiel 4.21 (Approximation einer Funktion durch ihre Tangente)

Die Tangente kann z.B. benutzt werden, um $f(x)$ zu schätzen, wenn man $f(a)$ und $f'(a)$ für ein a nahe bei x kennt. Wir wollen $\sqrt{2}$ näherungsweise berechnen und setzen $f(x) = \sqrt{x}$, also $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Wir setzen $a = 1,96$, denn wir kennen $f(a) = \sqrt{1,96} = 1,4$ und $f'(a) = \frac{1}{2 \cdot 1,4}$. Es gilt:

$$\sqrt{2} = f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a) = 1,4 + \frac{1}{2,8} \cdot (2 - 1,96) = 1,4142857 \dots$$

Für eine Abschätzung des Fehlers siehe Beispiel 4.32.