

## Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.1

### Definition 4.18 (Stetigkeit)

Gegeben sei ein offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  und ein Punkt  $a \in I$  sowie  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (a) Die Funktion  $f$  heißt **stetig** im Punkt  $a$ , wenn der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$  existiert und gilt:

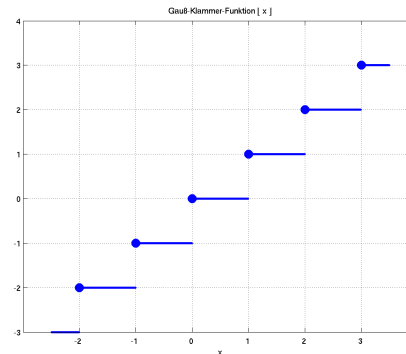
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- (b) Andernfalls heißt  $f$  **unstetig** im Punkt  $a$ .

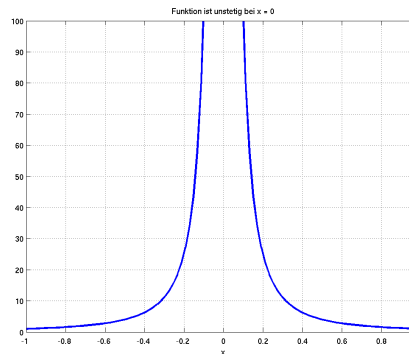
- (c) Falls  $f'(x)$  in jedem Punkt  $x \in I$  stetig ist, so heißt  $f$  stetig auf  $I$ .

### Beispiel 4.19 (Stetige und unstetige Funktionen)

- (a) Die Funktion  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  (siehe Beispiel 4.14) ist unstetig in allen Punkten  $a \in \mathbb{Z}$ , da rechts- und linksseitige Grenzwerte verschieden sind, d.h., der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existiert nicht. In allen anderen Punkten  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  ist die Funktion stetig.



- (b) Die Funktion  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  mit Definitionsbereich  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist unstetig im Punkt 0. Es existiert zwar (im un-eigentlichen Sinne)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  (siehe Beispiel 4.17 (b)), aber in Definition 4.18 ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$  gefordert.



- (c) Die Funktion  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(x + 1)}$  ist an der Stelle  $x = 2$  nicht definiert (also unstetig), besitzt dort aber den Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{4}{3}$  (siehe Beispiel 4.15 (a)).

Man kann eine **stetige Ersatzfunktion** für  $f$  bilden, indem man  $f(2) := \frac{4}{3}$  definiert.

