Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.1

Beispiel 2.35 (Lösung inhomogener LGS)

(a) Wir modifizieren Beispiel 2.29 (c) und wollen nun alle Lösungen des <u>in</u>homogenen LGS

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

finden. Dazu berechnen wir wieder die zugehörige Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 1 \\ \boxed{4} & -2 & 0 & 2 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \downarrow + \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \boxed{3} & -\frac{3}{2} & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\frac{3}{4}) \\ \\ \downarrow + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{5}{2}} & \frac{9}{4} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\frac{5}{4}) \\ \downarrow + \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das LGS ist <u>nicht lösbar</u>, denn die letzte Gleichung

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 = 1$$

ist nicht erfüllbar.

(b) Lautet die rechte Seite stattdessen $(6, 4, 2)^\top$, so ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 6 \\ \boxed{4} & -2 & 0 & 4 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \downarrow + \\ \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ \boxed{3} & -\frac{3}{2} & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\frac{3}{4}) \\ \\ \downarrow + \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{5}{2}} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-\frac{5}{4}) \\ \downarrow + \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dieses System <u>ist lösbar</u>. Aus dem Muster

$$\begin{pmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lesen wir ab, dass x_1 und x_3 wie in Beispiel 2.29 (c) wieder die <u>ab</u>hängigen Variablen sind und x_2 frei ist. Wir setzen $\boxed{x_2} = \lambda \in \mathbb{R}$ und erhalten bei der

Rückwärtssubstitution:

$$\begin{aligned} 2\,\boxed{x_3} = -2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_3 = -1 \\ 4\,\boxed{x_1} - 2\,x_2 - 2\,x_3 = 6 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\,x_1 = 2\,x_2 + 2\,x_3 + 6 = 2\,\lambda + 2 \cdot (-1) + 6 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\lambda + 1. \end{aligned}$$

Die **allgemeine Lösung** unseres LGS lautet also:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beachte: Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen

- aus einer **speziellen (partikulären) Lösung** $(1, 0, -1)^\top$
- und der allgemeinen Lösung $\lambda\,(1/2, 1, 0)^\top$ des zugehörigen homogenen Systems.

Die Lösungsmenge bildet also einen um den Vektor $(1, 0, -1)^\top$ „verschobenen Unterraum“.

Probe:

$$A\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{0},\text{ siehe Beispiel 2.30}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$