Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.1

Beispiel 2.39 **(Inverse Matrix zu A aus Beispiel 2.29 (a))**

Wir berechnen A^{-1} als Lösung der Gleichung $A\,X = E$. Die Spaltenvektoren $\vec{x}^{\,i}$ von X ergeben sich als Lösungen der LGS $A\,\vec{x}^{\,i} = \vec{e}_i$ mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$. Diese n LGS können wir alle *gleichzeitig* lösen:

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr}
4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
\boxed{4} & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 7 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \downarrow + \\ \end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr}
4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
\boxed{3} & 7 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \cdot(-\frac{3}{4}) \\ \\ \downarrow + \end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr}
4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & \boxed{7} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \cdot(\frac{7}{2}) \\ \downarrow + \end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr}
4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{19}{2} & -\frac{17}{4} & \frac{7}{2} & 1
\end{array}\right)
$$

Ende der Vorwärtselimination. Wir können jetzt wie gewohnt die Rückwärtssubstitution (Beispiel 2.30) für die drei rechten Seiten getrennt durchführen, z.B. für die erste rechte Seite:

$$
\begin{aligned}
\frac{19}{2}\,x_3 &= -\frac{17}{4} \quad &&\Rightarrow \quad x_3 = -\frac{17}{4}\,\frac{2}{19} = -\frac{17}{38} \\
-2\,x_2 &= -1 - 2\,x_3 = -1 + \frac{17}{19} = -\frac{2}{19} \quad &&\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{19} \\
4\,x_1 &= 1 + 2\,x_3 = 1 - \frac{17}{19} = \frac{2}{19} \quad &&\Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{38}
\end{aligned}
$$

und analog für die anderen zwei rechten Seiten. Alternativ kann man die Rückwärtssubstitution auch direkt im Matrixschema vornehmen, indem man durch die üblichen Umformungen (siehe Anfang von § 2.4.1) links die Einheitsmatrix erzeugt:

$$
\left(\begin{array}{rrr|rrr}
4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \frac{19}{2} & -\frac{17}{4} & \frac{7}{2} & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(\frac{2}{19}) \end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr}
4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & \boxed{2} & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\frac{17}{38} & \frac{7}{19} & \frac{2}{19}
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \uparrow + \\ \cdot(-2) \end{array}
$$

$$
\Leftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr}
4 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & -2 & 0 & -\frac{2}{19} & \frac{5}{19} & -\frac{4}{19} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{17}{38} & \frac{7}{19} & \frac{2}{19}
\end{array}\right)
\begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \end{array}
$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & \boxed{-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{19} & -\frac{5}{38} & \frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{38} & \frac{7}{19} & \frac{2}{19} \end{array}\right) \begin{array}{l} \uparrow + \\ \\ \cdot (2) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & \frac{2}{19} & \frac{14}{19} & \frac{4}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{19} & -\frac{5}{38} & \frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{38} & \frac{7}{19} & \frac{2}{19} \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot (\frac{1}{4}) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{38} & \frac{7}{38} & \frac{1}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{19} & -\frac{5}{38} & \frac{2}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{38} & \frac{7}{19} & \frac{2}{19} \end{array}\right)$$

Die inverse Matrix ist daher:

$$A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -17 & 14 & 4 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$$\frac{1}{38} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & -5 & 4 \\ -17 & 14 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$