Die konjugierte Funktion

Anne Pörnig

18. April 2010

1 Definition und Beispiele

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Die Funktion $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f^*(y) = \sup_{x \in dom f} (y^\top x - f(x)) \tag{1.1}$$

wird **Konjugierte** der Funktion f genannt, wobei $dom f$ den Definitionsbereich von f bezeichnet.

Der Definitionsbereich der konjugierten Funktion besteht aus den $y \in \mathbb{R}^n$, für die das Supremum endlich ist, d.h. für die die Differenz $y^\top x - f(x)$ nach oben beschränkt ist.

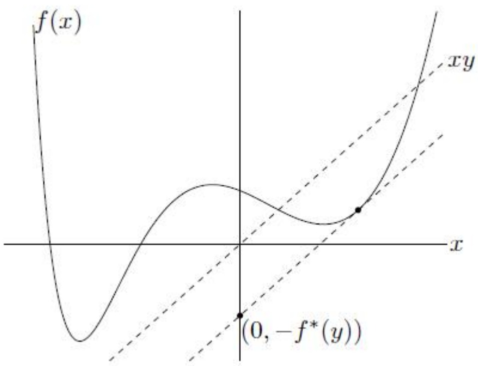

Abbildung 1.1: Die konjugierte Funktion $f^*(y)$ ist der größte Abstand zwischen der linearen Funktion yx und $f(x)$. Ist f differenzierbar, geschieht dies an dem Punkt x, wo $f'(x) = y$ gilt.

Die konjugierte Funktion f^* ist konvex, da sie das punktweise Supremum über eine Familie konvexer Funktionen von y darstellt.

Beispiel 1.1 (Konjugierte von konvexen Funktionen über $\mathbb{R}$) *:*

(a) ***Affine Funktion*** $f(x) = ax + b$
Die Funktion $h(x) = yx - ax - b$ ist genau dann beschränkt, falls $y = a$, also wenn sie konstant ist. In diesem Fall ist der Definitionsbereich der konjugierten Funktion f^* das einzelne Element a, und $f^*(a) = -b$.

(b) ***Negativer Logarithmus*** $f(x) = -\ln x$
Die Funktion $h(x) = yx + \ln x$ ist nach oben unbeschränkt, falls $y \geq 0$, und erreicht anderenfalls ihr Maximum an der Stelle $x = -\frac{1}{y}$.
$\text{dom} f = \{y | y < 0\}$, $f^*(y) = -\ln(-y) - 1$, falls $y < 0$.

(c) ***Exponentialfunktion*** $f(x) = e^x$
$h(x) = yx - e^x$ ist unbeschränkt, falls $y < 0$. Falls $y > 0$ erreicht sie ihr Maximum bei $x = \ln y$, dafür erhalten wir $f^*(y) = y \ \ln y - y$. Falls $y = 0$ ist $f^*(y) = \sup_x -e^x$. Zusammengefasst: $\text{dom} f = \mathbb{R}_+$ und $f^*(y) = y \ \ln y - y$ (mit der Interpretation $0 \ \ln 0 = 0$)

(d) ***Negative Entropie*** $f(x) = x \ \ln x$,
mit $\text{dom} f = \mathbb{R}_+$ (und $f(0) = 0$). Die Funktion $h(x) = yx - x \ \ln x$ ist für alle $y \in \mathbb{R}_+$ nach oben beschränkt, folglich ist $\text{dom} f^* = \mathbb{R}$. Die Funktion erreicht ihr Maximum bei $x = e^{y-1}$. Wir erhalten $f^*(y) = e^{y-1}$.

(e) ***Inverse*** $f(x) = \frac{1}{x}$
Für y>0 ist $h(x) = yx - \frac{1}{x}$ nach oben unbeschränkt. Für $y = 0$ hat die Funktion ihr Supremum bei 0; für $y < 0$ erreicht sie ihr Supremum bei $x = (-y)^{\frac{1}{2}}$. Wir erhalten $f^*(y) = -2(-y)^{\frac{1}{2}}$ mit $\text{dom} f = -\mathbb{R}_+$.

Beispiel 1.2 (strikt konvexe quadratische Funktion) *Betrachten $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx$, Q symmetrisch positiv definit. Die Funktion $y^\top x - \frac{1}{2}x^\top Qx$ ist für alle y nach oben beschränkt. Sie erreicht ihr Maximum bei $x = Q^{-1}y$.*

$$f^*(y) = \frac{1}{2}y^\top Q^{-1}y \tag{1.2}$$

Beispiel 1.3 (Indikatorfunktion) *Sei I_S die Indikatorfunktion einer (nicht notw. konvexen) Menge $S \in \mathbb{R}^n$, d.h. $I_S(x) = 0$ auf $\text{dom} I_S = S$. Die Konjugierte ist*

$$I_s^*(y) = \sup_{x \in S} \ (y^\top x) \tag{1.3}$$

Beispiel 1.4 (Norm) *Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ mit der dualen Norm $\|\cdot\|_*$ (Duale Norm: $\|u\|_* = \sup\{u^\top x | \ \|x\| \leq 1\}$) $f(x) = \|x\|$,*

$$f^*(y) = \begin{cases} 0, & \|y\|_* \leq 1 \\ \infty, & \textit{sonst} \end{cases} \tag{1.4}$$

Beispiel 1.5 (quadrierte Norm) *Sei $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, mit der Norm $\|\cdot\|$ und der zugehörigen dualen Norm $\|\cdot\|_*$. Die konjugierte Funktion dazu ist*

$$f^*(y) = \frac{1}{2}\|y\|_*^2 \tag{1.5}$$

2 Grundlegende Eigenschaften

2.1 Fenchel Ungleichheit

Aus der Definition der konjugierten Funktion erhalten wir sofort die Ungleichung

$$f(x) + f^*(y) \geq x^\top y \tag{2.1}$$

für alle x, y. Sie wird Fenchel'sche Ungleichung (oder Young'sche Ungleichung, falls f differenzierbar ist) genannt.

2.2 Die Konjugierte einer konjugierten Funktion

Die Konjugierte einer konjugierte Funktion f^{**} ergibt wieder die Originalfunktion f, falls gilt:

(i) f ist konvex

(ii) f ist abgeschlossen (d.h. $epi f$ ist abgeschlossen)

2.3 Differenzierbare Funktionen

Sei f eine konvexe, differenzierbare Funktion mit Definitionsbereich $dom f = \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$x^* \text{ maximiert } y^\top x - f(x) \Leftrightarrow x^* \text{ genügt } \nabla f(x^*) = y \tag{2.2}$$

Mit $y = \nabla f(x^*)$ erhalten wir

$$f^*(y) = x^{*\top} \nabla f(x^*) - f(x^*) \tag{2.3}$$

2.4 Skalierung und Vergleich mit affiner Transformation

Sei $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Die Konjugierte von $g(x) = af(x) + b$ ist

$$g^*(y) = a\ f^*(\frac{y}{a}) - b \tag{2.4}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Konjugierte von $g(x) = f(Ax + b)$ gerade

$$g^*(y) = f^*(A^{-\top} y) - b^\top A^{-\top} y \tag{2.5}$$

mit $dom\ g^* = A^\top\ dom\ f^*$

2.5 Summen unabhängiger Funktionen

Sei $f(u, v) = f_1(u) + f_2(v)$, f_1, f_2 konvexe Funktionen mit den entsprechenden Konjugierten f_1^*, f_2^*, dann ist

$$f^*(w, z) = f_1^*(w) + f_2^*(z) \tag{2.6}$$

Mit anderen Worten, die Konjugierte einer Summe unabhängiger Funktionen ist gleich der Summe der einzelnen Konjugierten.