

Beispiele

Marcel Nicklas

14.06.2010

In diesem Abschnitt zeigen wir anhand von Beispielen, wie einfache äquivalente Umformulierungen des primalen Problems zu sehr verschiedenen dualen Problemen führen können. Wir betrachten die folgenden Arten von Umformulierungen:

- Einführen neuer Variablen und der damit verbundenen Gleichheitsbeschränkungen
- Umwandeln der Zielfunktion
- Aufnahme von Beschränkungen in die Zielfunktion durch deren Umdefinition

1 Einführen neuer Variablen und Gleichheitsbeschränkungen

Betrachten ein unbeschränktes Problem der Form:

$$\text{minimiere } f_0(Ax + B). \quad (1.1)$$

Seine Lagrange-duale-Funktion ist das konstante p^* . Obwohl wir starke Dualität haben, d.h. $p^* = d^*$, ist die Lagrange-duale-Funktion weder hilfreich noch interessant. Wir formulieren jetzt das Problem (1.1) wie folgt um

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & f_0(y) \\ \text{sodass } & Ax + b = y. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Hier haben wir die neue Variable y sowie die neue Gleichheitsbeschränkung $Ax + b = y$ eingeführt. Die Probleme (1.1) und (1.2) sind offenbar äquivalent. Die Lagrange-Funktion des umformulierten Problems ist

$$L(x, y, \nu) = f_0(y) + \nu^T(Ax + b - y).$$

Um die duale Funktion zu finden, minimieren wir L über x und y . Aus der Minimierung über x folgt $g(\nu) = -\infty$, es sei denn $A^T \nu = 0$, in diesem Fall bekommen wir

$$g(\nu) = b^T \nu + \inf_y (f_0(y) - \nu^T y) = b^T \nu - f_0^*(\nu),$$

wobei f_0^* die Konjugierte von f_0 ist. Das duale Problem von (1.2) kann deshalb wie folgt ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & b^T \nu - f_0^*(\nu) \\ \text{sodass} \quad & A^T \nu = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Somit ist das Duale des umformulierten Problems (1.2) hilfreicher als das Duale vom ursprünglichen Problem (1.1).

Beispiel 1.1 (Unbeschränktes geometrisches Problem) *Betrachten das unbeschränkte geometrische Problem*

$$\text{minimiere} \quad \log\left(\sum_{i=1}^m \exp(a_i^T x + b_i)\right).$$

Wir formulieren es zuerst um, indem wir neue Variablen und Gleichheitsbeschränkungen einführen

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & f_0(y) = \log\left(\sum_{i=1}^m \exp(y_i)\right) \\ \text{sodass} \quad & Ax + b = y, \end{aligned}$$

wobei a_i^T die Zeilen von A sind. Die Konjugierte dieser Log-Sum-Exp-Funktion ist

$$f_0^*(\nu) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m \nu_i \log \nu_i & \nu \succeq 0, \mathbf{1}^T \nu = 1 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(Durch Nullsetzen des Gradienten der Hilfsfunktion $h_0(y) = \nu^T y - f_0(y)$ bekommen wir $\nu_i = \frac{\exp(y_i)}{\sum_{j=1}^m \exp(y_j)}$ für $i = 1, \dots, m$. Diese Gleichungen sind genau dann lösbar für y , wenn $\nu \succ 0$ und $\mathbf{1}^T \nu = 1$. Daraus ergibt sich die konjugierte Funktion. Wenn wir $0 * \log 0 = 0$ setzen, gilt sogar $\nu \succeq 0$.)

Somit kann das Duale vom umformulierten Problem ausgedrückt werden als

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & b^T \nu - \sum_{i=1}^m \nu_i \log \nu_i \\ \text{sodass} \quad & \mathbf{1}^T \nu = 1 \\ & A^T \nu = 0 \\ & \nu \succeq 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

welches eine Art Entropie-Maximierungsproblem ist, wobei $\sum_{i=1}^m \nu_i \log \nu_i$ die übliche Entropiefunktion ist (vgl. Referat 'Lagrange-duale Funktion', Beispiel 6.2).

Beispiel 1.2 (Normapproximationsproblem) *Wir betrachten das unbeschränkte Normapproximationsproblem*

$$\text{minimiere} \quad \|Ax - b\|, \tag{1.5}$$

wobei $\|\cdot\|$ irgendeine Norm ist. Auch hier ist die Lagrange-Duale-Funktion konstant, und gleich dem Optimalwert von (1.5), und deshalb nicht sehr hilfreich. Wieder formulieren wir das Problem um als

$$\begin{aligned} &\text{minimiere} \quad \|y\| \\ &\text{sodass} \quad Ax - b = y. \end{aligned}$$

Das Lagrange-Duale-Problem ist nach (1.3),

$$\begin{aligned} &\text{maximiere} \quad b^T \nu \\ &\text{sodass} \quad \|\nu\|_* \leq 1 \\ &\quad \quad \quad A^T \nu = 0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

wobei wir die Tatsache verwendet haben, dass die Konjugierte einer Norm die Indikatorfunktion der dualen Norm bzgl. der Einheitskugel ist (vgl. Referat 'Lagrange-duale Funktion', Beispiel 6.1).

Die Idee der Einführung neuer Gleichheitsbeschränkungen kann auch auf die Beschränkungsfunktionen selber angewandt werden. Betrachten wir zum Beispiel das Problem

$$\begin{aligned} &\text{minimiere} \quad f_0(A_0x + b_0) \\ &\text{sodass} \quad f_i(A_i x + b_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{1.7}$$

wobei $A_i \in \mathbb{R}^{k_i \times n}$ und $f_i : \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex sind. (Der Einfachheit halber lassen wir hier Gleichheitsbeschränkungen weg.) Wir führen eine neue Variable $y_i \in \mathbb{R}^{k_i}$ für $i = 0, \dots, m$, ein, und formulieren das Problem um als

$$\begin{aligned} &\text{minimiere} \quad f_0(y_0) \\ &\text{sodass} \quad f_i(y_i) \leq 0, \quad i = 0, \dots, m \\ &\quad \quad \quad A_i x + b_i = y_i, \quad i = 0, \dots, m. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Die Lagrange-Funktion für dieses Problem ist

$$L(x, y_0, \dots, y_m, \lambda, \nu_0, \dots, \nu_m) = f_0(y_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(y_i) + \sum_{i=0}^m \nu_i^T (A_i x + b_i - y_i).$$

Um die duale Funktion zu finden, minimieren wir über x und y_i . Das Minimum über x ist $-\infty$, es sei denn

$$\sum_{i=0}^m A_i^T \nu_i = 0,$$

wo wir für $\lambda \succ 0$

$$\begin{aligned} g(\lambda, \nu_0, \dots, \nu_m) &= \sum_{i=0}^m \nu_i^T b_i + \inf_{y_0, \dots, y_m} (f_0(y_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(y_i) - \sum_{i=0}^m \nu_i^T y_i) \\ &= \sum_{i=0}^m \nu_i^T b_i + \inf_{y_0} (f_0(y_0) - \nu_0^T y_0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \inf_{y_i} (f_i(y_i) - (\nu_i/\lambda_i)^T y_i) \\ &= \sum_{i=0}^m \nu_i^T b_i - f_0^*(\nu_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i^*(\nu_i/\lambda_i) \end{aligned}$$

erhalten.

Schließlich stellen wir die Frage, was passiert, wenn $\lambda \succeq 0$, also einige λ_i Null sind. Wenn $\lambda_i = 0$ und $\nu_i \neq 0$, dann ist die duale Funktion $-\infty$. Wenn $\lambda_i = 0$ und $\nu_i = 0$ ist, dann sind alle Terme in denen y_i, ν_i , oder λ_i vorkommen gleich Null. Somit ist der Ausdruck oben für g für alle $\lambda \succeq 0$ gültig, wenn wir $\lambda_i f_i^*(\nu_i/\lambda_i) = 0$ für $\lambda_i = 0$ und $\nu_i = 0$ nehmen, und $\lambda_i f_i^*(\nu_i/\lambda_i) = \infty$ für $\lambda_i = 0$ und $\nu_i \neq 0$. Deshalb können wir das Duale vom Problem (1.8) ausdrücken als

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & \sum_{i=0}^m \nu_i^T b_i - f_0^*(\nu_0) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i^*(\nu_i/\lambda_i) \\ \text{sodass} \quad & \lambda \succeq 0 \\ & \sum_{i=0}^m A_i^T \nu_i = 0. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Beispiel 1.3 (beschränktes geometrisches Problem) *Das beschränkte geometrische Problem*

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & \log\left(\sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^T x + b_{0k}}\right) \\ \text{sodass} \quad & \log\left(\sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^T x + b_{ik}}\right) \leq 0 \quad i = 0, \dots, m \end{aligned}$$

ist von der Form (1.7) mit $f_i : \mathbb{R}^{K_i} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_i(y) = \log(\sum_{k=1}^{K_i} e^{y_k})$. Die Konjugierte dieser Funktion ist

$$f_i^*(\nu) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{K_i} \nu_k \log \nu_k & \nu \succeq 0, \mathbf{1}^T \nu = 1 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Durch (1.9) können wir das duale Problem sofort als

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & b_0^T \nu_0 - \sum_{k=1}^{K_0} \nu_{0k} \log \nu_{0k} + \sum_{i=1}^m (b_i^T \nu_i - \sum_{k=1}^{K_i} \nu_{ik} \log(\nu_{ik}/\lambda_i)) \\ \text{sodass} \quad & \nu_0 \succeq 0, \quad \mathbf{1}^T \nu_0 = 1 \\ & \nu_i \succeq 0, \quad \mathbf{1}^T \nu_i = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{i=0}^m A_i^T \nu_i = 0 \end{aligned}$$

formulieren, welches weiter zu

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & b_0^T \nu_0 - \sum_{k=1}^{K_0} \nu_{0k} \log \nu_{0k} + \sum_{i=1}^m (b_i^T \nu_i - \sum_{k=1}^{K_i} \nu_{ik} \log(\nu_{ik}/\mathbf{1}^T \nu_i)) \\ \text{sodass} \quad & \nu_i \succeq 0, \quad i = 0, \dots, m \\ & \mathbf{1}^T \nu_0 = 1 \\ & \sum_{i=0}^m A_i^T \nu_i = 0 \end{aligned}$$

vereinfacht werden kann.

2 Umwandlung der Zielfunktion

Wenn wir die Zielfunktion f_0 durch eine monoton wachsende Variante ihrer selbst ersetzen, ist das resultierende Problem offenbar äquivalent, da das Minimum an der gleichen Stelle angenommen wird. Das Duale von diesem äquivalenten Problem kann jedoch sehr verschieden vom Dualen des ursprünglichen Problems sein.

Beispiel 2.1 *Wir betrachten wieder das Normapproximationsproblem*

$$\text{minimiere } \|Ax - b\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ eine Norm ist. Wir formulieren dieses Problem um als

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & (1/2)\|y\|^2 \\ \text{sodass } & Ax - b = y. \end{aligned}$$

Hier haben wir neue Variablen eingeführt, und die Zielfunktion mit der Hälfte ihres Quadrates ersetzt. Zweifellos ist es zum ursprünglichen Problem äquivalent, was das Annehmen der Minimumstelle betrifft. Das Duale vom umformulierten Problem ist

$$\begin{aligned} \text{maximiere } & b^T \nu - (1/2)\|\nu\|_*^2 \\ \text{sodass } & A^T \nu = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Tatsache benutzt haben, dass das Konjugierte von $(1/2)\|\cdot\|^2$ $(1/2)\|\cdot\|_*^2$ ist (vgl. Referat 'Die konjugierte Funktion', Beispiel 1.5). Man sieht, dass dieses duale Problem nicht dasselbe ist wie das duale Problem (1.6) von früher.

3 Aufnahme von Beschränkungen in die Zielfunktion durch deren Umdefinition

Die nachfolgende einfache Umformulierung, die wir betrachten, soll einige der Beschränkungen in die Zielfunktion aufnehmen, indem wir die Zielfunktion in eine Art Indikatorfunktion umdefinieren.

Beispiel 3.1 (Lineares Programm mit Box-Beschränkungen) *Wir betrachten das lineare Programm*

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & c^T x \\ \text{sodass } & Ax = b \\ & l \preceq x \preceq u, \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $l \prec u$. Die Beschränkungen $l \preceq x \preceq u$ werden manchmal Box-Beschränkungen oder Variablen Grenzen genannt.

Wir können natürlich das Duale von diesem linearen Programm ableiten:

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad & -b^T \nu - \lambda_1^T u + \lambda_2^T l \\ \text{sodass} \quad & A^T \nu + \lambda_1 - \lambda_2 + c = 0 \\ & \lambda_1 \succeq 0, \quad \lambda_2 \succeq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

(vgl. Vorlesung 'Grundlagen der Optimierung', Übung 8, Aufgabe 3). Wir können statt dessen zuerst das Problem (3.1) umformulieren als:

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & f_0(x) \\ \text{sodass} \quad & Ax = b, \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei wir

$$f_0(x) = \begin{cases} c^T x & l \preceq x \preceq u \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

definieren. Das Problem (3.3) ist zu (3.1) offensichtlich äquivalent; wir haben die expliziten Box-Beschränkungen in die Zielfunktion aufgenommen. Die duale Funktion für das Problem (3.3) ist

$$\begin{aligned} g(\nu) &= \inf_{l \preceq x \preceq u} (c^T x + \nu^T (Ax - b)) \\ &= -b^T \nu - u^T (A^T \nu + c)^- + l^T (A^T \nu + c)^+, \end{aligned}$$

wobei $y_i^+ = \max\{y_i, 0\}$, $y_i^- = \max\{-y_i, 0\}$ ist. Somit ist das duale Problem das unbeschränkte Problem

$$\text{maximiere} \quad -b^T \nu - u^T (A^T \nu + c)^- + l^T (A^T \nu + c)^+, \quad (3.4)$$

welches eine ziemlich andere Form als das Duale des ursprünglichen Problems hat.