Sattelpunkt-Interpretation

Vinzenz Lang

14. Mai 2010

Die Sattelpunkt-Interpretation befasst sich mit der Interpretation der Lagrange-Dualität. Sie wird im weiteren Verlauf des Seminars nicht noch einmal aufgegriffen werden.

1 Die Max-Min-Darstellung schwacher und starker Dualität

Es ist möglich, das primale und duale Optimierungsproblem in einer gut vergleichbaren Form darzustellen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass es keine Gleichungsnebenbedingungen gibt. Jene können durch Erweiterungen der Optimierungsaufgaben leicht behandelt werden. Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda \succeq 0} L(x,\lambda) &= \sup_{\lambda \succeq 0} \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right) \\ &= \begin{cases} f_0(x) & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Denn angenommen x sei kein zulässiger Punkt, also $f_i(x) > 0$ für irgendein i. Dann gilt durch Wahl von $\lambda_j = 0$ für $j \neq i$ und $\lambda_i \to \infty$, dass $\sup_{\lambda \succeq 0} L(x,\lambda) = \infty$. Andererseits, wenn $f_i(x) \le 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$, ist es optimal, $\lambda = 0$ zu wählen, woraus folgt, dass $\sup_{\lambda \succeq 0} L(x,\lambda) = f_0(x)$. Das bedeutet, dass wir den Optimalwert des primalen Optimierungsproblems in folgender Form darstellen können:

$$p^\star = \inf_x \sup_{\lambda \succeq 0} L(x,\lambda)$$

Gemäß der Definition der dualen Funktion gilt außerdem:

$$d^\star = \sup_{\lambda \succeq 0} \inf_x L(x,\lambda)$$

Folglich kann schwache Dualität durch die Ungleichung

$$\sup_{\lambda \succeq 0} \inf_x L(x,\lambda) \le \inf_x \sup_{\lambda \succeq 0} L(x,\lambda) \tag{1.1}$$

und starke Dualität durch die Gleichung

$$\sup_{\lambda \succeq 0} \inf_x L(x, \lambda) = \inf_x \sup_{\lambda \succeq 0} L(x, \lambda)$$

dargestellt werden. Starke Dualität bedeutet demnach, dass die Reihenfolge des Minimierens über x und des Maximierens über $\lambda \succeq 0$ vertauscht werden kann, ohne das Ergebnis zu ändern. Prinzipiell ist die Ungleichung (1.1) von den Eigenschaften von L unabhängig, denn es gilt

$$\sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} f(w, z) \leq \inf_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z). \tag{1.2}$$

für jede Funtion $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ (und alle Teilmengen $W \subseteq \mathbf{R}^n$ und $Z \subseteq \mathbf{R}^m$). Diese allgemeine Ungleichung wird als Max-Min-Ungleichung bezeichnet. Bei Gleichheit gilt

$$\sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} f(w, z) = \inf_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z). \tag{1.3}$$

Man sagt, dass in diesem Fall f (und W,Z) die starke Max-Min-Bedingung oder einfach die Sattelpunkteigenschaft erfüllt. Selbstverständlich gilt die starke Max-Min-Bedingung nur in Spezialfällen, etwa wenn $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ die Lagrange-Funktion eines Optimierungsproblems ist, für welches starke Dualität voliegt, in welchem Falle $W = \mathbf{R}^n$ und $Z = \mathbf{R}^m_+$ ist.

2 Sattelpunkt-Interpretation

Man bezeichnet ein Paar $\tilde{w} \in W, \tilde{z} \in Z$ als Sattelpunkt von f (und W, Z), wenn

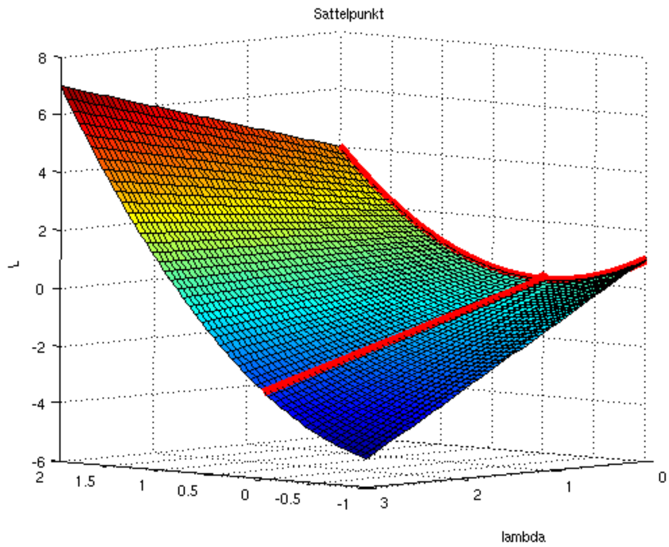
$$f(\tilde{w}, z) \leq f(\tilde{w}, \tilde{z}) \leq f(w, \tilde{z})$$

für alle $w \in W$ und $z \in Z$. Anders gesagt minimiert $\tilde{w}$ die Funktion $f(w, \tilde{z})$ über $w \in W$ und $\tilde{z}$ maximiert $f(\tilde{w}, z)$ über alle $z \in Z$:

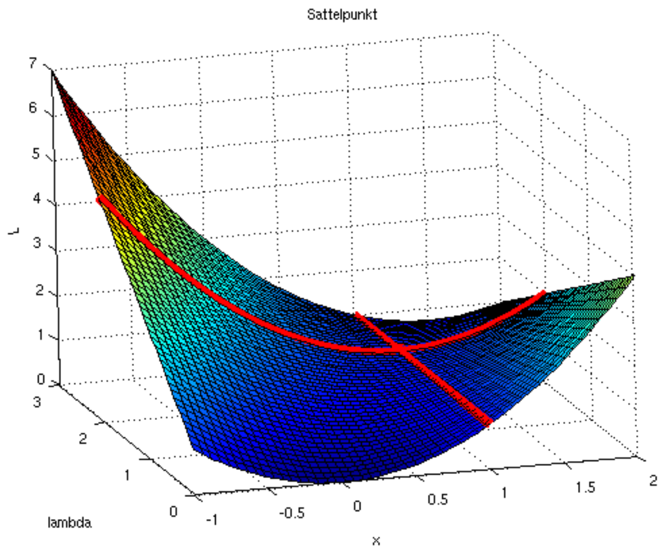
$$f(\tilde{w}, \tilde{z}) = \inf_{w \in W} f(w, \tilde{z}), \qquad f(\tilde{w}, \tilde{z}) = \sup_{z \in Z} f(\tilde{w}, z).$$

Für jeden Sattelpunkt gilt demnach die starke Max-Min-Bedingung (1.3), wobei der gemeinsame Wert $f(\tilde{w}, \tilde{z})$ ist. Wenn wir nun auf das Thema der Lagrange-Dualität zurückkommen, sieht man, dass wenn $x^\star$ und $\lambda^\star$ primal und dual optimale Punkte eines Problems, für welches starke Dualität gilt, sind, so bilden sie einen Sattelpunkt der Lagrange-Funktion. Auch die Umkehrung gilt: Wenn (x, λ) ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion ist, so ist x primal und λ dual optimal und die Dualitätslücke ist gerade 0.

1. Beispiel (inaktiver Fall)



2.Beispiel (aktiver Fall)



3 Interpretation als Spiel

Man kann die Max-Min-Ungleichung (**??**), die starke Max-Min-Bedingung (1.3) und die Eigenschaft Sattelpunkt zu sein als Ausdrücke eines bedingten Auszahlungs-Spiels interpretieren (da die Auswahlmöglichkeiten Vektoren sind und voneinander nicht getrennt werden können). Wenn der erste Spieler ein $w \in W$ wählt und der zweite ein $z \in Z$, so zahlt Spieler 1 an Spieler 2 den Betrag $f(w, z)$. Deshalb möchte Spieler 1 die Funktion f minimieren, wohingegen Spieler 2 sie zu maximieren versucht. Angenommen Spieler 1 muss als erster entscheiden. Danach darf Spieler 2 mit Kenntnis der Entscheidung von 1 wählen. Spieler 2 möchte also die Auszahlung $f(w, z)$ maximieren, und sein $z \in Z$ so wählen, dass $f(w, z)$ den maximalen Wert annimmt. Die daraus resultierende Auszahlung wird also $\sup_{z \in Z} f(w, z)$ sein, die von der Wahl des $w \in W$ von Spieler 1 abhängt (es wird stets angenommen, dass das Supremum angenommen wird, wenn die obere Schranke $\sup_{z \in Z} f(w, z)$ nicht erreicht werden kann. Da Spieler 1 von der Maximierungs-Strategie des 2. Spielers ausgeht, wird er sein $w \in W$ so wählen, dass die (nach Wahl von w ja immer schlechteste) Auszahlung an Spieler 2 so klein wie möglich sein wird. Demnach entscheidet sich Spieler 1 für

$$\arg \min_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z),$$

was zur Auszahlung

$$\inf_{w \in W} \sup_{z \in Z} f(w, z)$$

von Spieler 1 an Spieler 2 führt. Sei nun die Reihenfolge des Spiels umgekehrt: Spieler 2 muss als erstes ein $z \in Z$ wählen, ehe Spieler 1 mit Kenntnis des z sein $w \in W$ wählt.Wenn die Spieler der für sie optimalen Strategie folgen, folgt aus selbigen Gründen, dass Spieler 2 sein $z \in Z$ wählen sollte um $\inf_{w \in W} f(w, z)$ zu maximieren (da Spieler 1 ja immer so entscheiden wird, dass bei Wahl von z die für ihn niedrigsten Kosten entstehen). Aus diesem Grund beträgt die resultierende Auszahlung in diesem Fall

$$\sup_{z \in Z} \inf_{w \in W} f(w, z)$$

(wieder von Spieler 1 an Spieler 2, da f so definiert war). Die Max-Min-Ungleichung (**??**) drückt die (einleuchtende) Tatsache aus, dass es für einen Spieler besser ist, sich erst nach dem Kontrahenten zu entscheiden, also die Wahl des Gegners vor der eigenen Wahl zu kennen. Man kann auch sagen, dass die Auszahlung an Spieler 2 (im Allgemeinen) größer sein wird, wenn sich Spieler 1 als erstes entscheiden muss. Wenn die Sattelpunkt-Eigenschaft (1.3) gilt, gibt es keinen Vorteil mehr, als zweiter an der Reihe zu sein. Ist $(\tilde{w}, \tilde{z})$ ein Sattelpunkt von f (und W, Z), wird er Lösung des Spiels genannt. $\tilde{w}$ wird hierbei als optimale Auswahlmöglichkeit von Spieler 1 bezeichnet, $\tilde{z}$ als beste Wahl oder Strategie des zweiten Spielers. Für $(\tilde{w}, \tilde{z})$ gibt es keinen Vorteil, als zweiter zu spielen. Nun soll der Spezialfall behandelt werden, in dem die Auszahlungsfunktion gerade die Lagrange-Funktion ist, $W = \mathbf{R}^n$ und $Z = \mathbf{R}^m_+$. In diesem Fall wählt der Erste die primale Variable x, wohingegen der zweite Spieler die duale Variable $\lambda \succeq 0$ festlegt. Wie wir vorhin schon gesehen haben, ist die beste Entscheidung für den zuerst spielenden Spieler 2 jedes $\lambda^\star$, welches dual optimal ist, und zu einer Auszahlung von $d^\star$ an ihn führt. Demgegenüber steht, wenn Spieler 1 wieder beginnen darf ein primal optimales $x^\star$ mit der zugehörigen Auszahlung $p^\star$. Die optimale Dualitäts-Lücke dieses Problems ist gleichzusetzen mit dem Vorteil, den Spieler 2 als Nachfolger hat da er weiß, was sein Gegenspieler vor ihm getan hat. Im Falle starker Dualität gibt es keinen Vorteil mehr, die Wahl des Gegners zu kennen.

4 Interpretation als Preise und Gebühren

Es ist interessant die Lagrange-Dualität hinsichtlich ökonomischen Aspekten zu interpretieren. Nehmen wir zu diesem Zweck an, dass die Variable x das Vorgehen eines Unternehmens bezeichnet. Und die Funktion $f_0(x)$ gibt die zum Vorgehen x zugehörigen Kosten an. Also ist $-f_0(x)$ der Gewinn (z.B. in Euro) welcher im Zusammenhang mit dem entsprechenden Vorgehen einhergeht. Jede Nebenbedingung $f_i(x) \leq 0$ beschreibt eine Beschränkung, zum Beispiel von Ressourcen wie Lagerraum oder Regelungen, wie z.B. Gesetze, welche eingehalten werden müssen. Dasjenige Vorgehen, welches den entstehenden Gewinn maximiert und gleichzeitig alle Beschränkungen einhält, kann durch Lösen des Problems

$$\begin{array}{ll} \text{minimiere} & f_0(x), \\ \text{u.d.N.} & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{array}$$

ermittelt werden. Der Optimalgewinn ist wie man leicht sieht $-p^\star$. In einem weiteren Szenario sollen jetzt Baschränkungen verletzt werden dürfen, indem man einen zusätzlichen Preis bezahlt. Dieser hängt linear von der Größe der Überschreitung von f_i ab. Folglich beläuft sich die Zahlung der Firma für die i-te Beschränkung auf $\lambda_i f_i(x)$. Es können auch Zahlungen an die Firma gemacht werden, wenn die entsprechende Obergrenze einer Ressource noch nicht erreicht ist. Der Koeffizient λ_i ist also als Preis für die Überschreitung von $f_i \leq 0$ zu sehen, dessen Einheit Euro pro überschrittener Einheit sind. Zum gleichen Preis kann das Unternehmen unbenutzte Anteile der i-ten Ressource verkaufen. Wir nehmen nun $\lambda_i \geq 0$ an, das Unternehmen muss also für Überschreitungen bezahlen (und erhält Geld für unausgelastete Ressourcen). Als Beispiel betrachten wir nun die erste Beschränkung des Ausgangsproblems, nämlich eine Beschränkung an Lagerraum (in m^2). In diesem Zusammenhang eröffnen wir die Möglichkeit, dass die Firma zusätzlichen Raum zu Kosten von λ_1 Euro pro m^2 kaufen und unbenutzten Platz zum selben Preis vermieten kann. Die gesamten Kosten, welche für eine Firma, die die Operation x ausführt, entstehen, belaufen sich somit auf $L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$. Es ist klar, dass das Unternehmen die Gesamtkosten zu minimieren versucht, was zu einem Betrag von $g(\lambda)$ führt. Die duale Funktion hingegen gibt die für die Firma optimalen Kosten an, welche eine Funktion des Preisbeschränkungs-Vektors λ ist. Der optimale duale Wert, $d^\star$, entspricht den optimalen Kosten der Firma, wenn die ungünstigsten Preise (also die λ_i des Vektors λ) vorliegen. Wenn wir unsere Betrachtungsweise beibehalten, können wir schwache Dualität wie folgt beschreiben: Die optimalen Kosten im 2.Szenario (indem Beschränkungsverletzungen erlaubt sind) sind kleiner oder gleich den Kosten des Originalproblems, in dem die Beschränkungen nicht gebrochen werden dürfen. Das ist offensichtlich, da wenn $x^\star$ optimal im 1. Szenario ist, werden die entstehenden Kosten im 2.Szenario kleiner oder gleich als $f_0(x^\star)$ sein, da man ja Einnahmen durch die nicht ausgelasteten Ressourcen erzielt werden können. Die optimale Dualitätslücke ist jetzt der kleinste mögliche Vorteil der Firma, die sie aus dem Recht für Grenzüberschreitungen zu zahlen oder Einnahmen zu erhalten, ziehen kann. Wenn wieder angenommen wird, dass starke Dualität gilt und das duale Optimum erreicht ist, so können wir ein dual optimales $\lambda^\star$ als Menge von Preisen interpretieren, für die es keinen Vorteil gibt, in der Lage sein zu dürfen, Ressourcengrenzen zu überschreiten. Deshalb wird ein dual optimales $\lambda^\star$ manchmal auch als Schattenpreis bezeichnet.