Störungs- und Sensitivitätsanalyse

Jan Blechschmidt

3. Juni 2010

1 Das gestörte Problem

Wenn starke Dualität gilt, geben uns die optimalen Lagrange-Variablen sehr nützliche Informationen über die Sensitivität des Optimalwertes unter Einbeziehung von Störungen in den Beschränkungen.
Wir erinnern uns an das allgemeine Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & f_0(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \text{und} \quad & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{1.1}$$

und betrachten das folgende gestörte Problem

$$\begin{aligned} \text{minimiere} \quad & f_0(x) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & f_i(x) \leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \text{und} \quad & h_i(x) = v_i, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dabei bedeutet $u_i > 0$, dass wir die i-te Ungleichung abgeschwächt haben und $u_i < 0$, dass wir die i-te Ungleichung verstärkt haben. Aus diesem Grund ergibt sich das gestörte Problem (1.2) aus dem Originalproblem (1.1) durch Verstärkung oder Abschwächung jeder einzelnen Ungleichungsbeschränkung durch u_i und Abändern der rechten Seiten der Gleichungsbeschränkungen durch v_i. Wie man leicht sieht, stimmt das gestörte Problem mit dem Originalproblem überein, wenn $u = 0$ und $v = 0$ gilt.
Wir definieren $p^*(u, v)$ als Optimalwert des gestörten Problems (1.2):

$$\begin{aligned} p^*(u, v) = \inf\{f_0(x) | \exists x \in D, f_i(x) \leq u_i, i = 1, \dots, m, \\ h_i(x) = v_i, i = 1, \dots, p\}. \end{aligned}$$

Es wird sofort klar, dass $p^*(0, 0)$ dem Optimalwert des ungestörten Problems p^* entspricht. Aus der Definition folgt, dass auch $p^*(u, v) = \infty$ zulässig ist, was Störungen entspricht, die zur Unlösbarkeit des Optimierungsproblems (1.2) führen. Man kann sagen, dass uns die Funktion $p^* : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ den Optimalwert des Problems als eine Funktion von Störungen in den rechten Seiten der Beschränkungen widergibt.

Ist das Originalproblem konvex, so auch die Funktion $p^*(u,v)$. In der Tat entspricht der Epigraph von $p^*(u,v)$ gerade dem Abschluss der Menge

$$\mathcal{A} = \mathcal{G} + (\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+) \quad \text{mit}$$
$$\mathcal{G} = \{(f_1(x), \ldots, f_m(x), h_1(x), \ldots, h_p(x), f_0(x)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} | x \in D\}.$$

Vergleiche hierzu auch [Riedel(SS2010), (1.2)].

2 Eine globale Ungleichung

In diesem Abschnitt setzen wir starke Dualität voraus und fordern zusätzlich, dass das duale Optimum angenommen wird. Dies ist der Fall, wenn das Optimierungsproblem konvex und die Slaterbedingung erfüllt ist. Sei (λ^*, ν^*) optimal für das duale ungestörte Problem:

$$\begin{aligned} \text{maximiere} \quad g(\lambda,\nu) &= \inf_{x\in D} L(x,\lambda,\nu) \\ &= \inf_{x\in D} \left(f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x) \right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dann gilt für alle u und v

$$p^*(u,v) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^\top u - {\nu^*}^\top v. \tag{2.2}$$

Um die Richtigkeit der Aussage zu prüfen, betrachten wir einen beliebigen zulässigen Punkt x des gestörten Problems, das heißt es gilt $f_i(x) \leq u_i \; \forall i = 1, \ldots, m$ und $h_i(x) = v_i \; \forall i = 1, \ldots, p$.
Damit folgt aus der starken Dualität

$$\begin{aligned} p^*(0,0) = g(\lambda^*,\nu^*) &\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \\ &\leq f_0(x) + {\lambda^*}^\top u + {\nu^*}^\top v. \end{aligned}$$

(Die erste Ungleichung folgt direkt aus der Definition von $g(\lambda^*,\nu^*)$ und die zweite folgt, weil $\lambda \succeq 0$.) Zusammenfassend gilt für jeden zulässigen Punkt x des gestörten Problems

$$f_0(x) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^\top u - {\nu^*}^\top v$$

und damit auch

$$p^*(u,v) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^\top u - {\nu^*}^\top v.$$

Sensitivitätsinterpretation

Wenn starke Dualität vorliegt, folgen verschiedene Sensitivitätsinterpretationen der optimalen Lagrangevariablen direkt aus der Ungleichung (2.2). Einige der Aussagen sind:

- Wenn λ_i^* groß ist und wir die i-te Beschränkung verstärken (wir wählen $u_i < 0$), dann wird der Optimalwert $p^*(u,v)$ garantiert stark ansteigen.

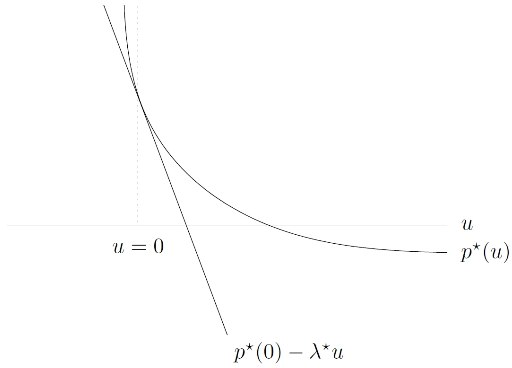

Abbildung 2.1: Optimalwert $p^*(u)$ eines konvexen Problems mit einer Beschränkung $f_1(x) \leq u$ als eine Funktion in Abhängigkeit von u. Für $u = 0$ liegt uns das originale ungestörte Problem vor; für $u < 0$ haben wir die Beschränkung verstärkt, für $u > 0$ ist die Beschränkung abgeschwächt. Die affine Funktion $p^*(0) - \lambda^* u$ ist eine untere Schranke von p^*.

- Wenn ν_i^* groß und positiv ist und wir $v_i < 0$ wählen, oder wenn ν_i^* groß und negativ ist und wir $v_i > 0$ wählen, dann wird der Optimalwert $p^*(u, v)$ garantiert stark ansteigen.
- Wenn λ_i^* klein ist und wir die i-te Beschränkung abschwächen (wir wählen $u_i > 0$), dann wird der Optimalwert $p^*(u, v)$ nicht sonderlich stark fallen.
- Wenn ν_i^* klein und positiv ist und wir $v_i > 0$ wählen, oder wenn ν_i^* klein und negativ ist und wir $v_i < 0$ wählen, dann wird der Optimalwert $p^*(u, v)$ nicht sonderlich abfallen.

Die Ungleichung (2.2) und die zuvor aufgeführten Aussagen geben eine untere Schranke für den Optimalwert des gestörten Problems, aber keine obere. Aus diesem Grund sind die Ergebnisse nicht symmetrisch bzgl. der Abschwächung bzw. Verstärkung von Beschränkungen. Man nehme an, dass λ_i^* groß ist und wir die i-te Beschränkung ein klein wenig abschwächen (wir wählen u_i klein und positiv). In diesem Fall ist die Ungleichung (2.2) nicht nützlich; es impliziert zum Beispiel nicht, dass der Optimalwert $p^*(u, v)$ in beträchtlichem Maße steigt.
Die Ungleichung (2.2) ist in Abbildung 2.1 für ein konvexes Problem mit einer Ungleichungsbeschränkung illustriert. Die Ungleichung besagt, dass $p^*(0) - \lambda^* u$ eine untere Schranke für die konvexe Funktion p^* ist.

3 Lokale Sensitivitätsanalyse

Wir nehmen in diesem Abschnitt an, dass $p^*(u, v)$ für $u = 0, v = 0$ differenzierbar ist. Dann gilt unter starker Dualität, dass die optimalen Dualvariablen

λ^*, ν^* mit dem Gradienten von p^* an $u = 0, v = 0$ in Verbindung stehen:

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}, \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i}. \tag{3.1}$$

Diese Eigenschaft sieht man am Beispiel der Abbildung 2.1 , wo $-\lambda^*$ der Anstieg von p^* an der Stelle $u = 0$ ist.
Demnach sind die optimalen Lagrangemultiplikatoren genau die lokalen Sensitivitäten des Optimalwertes bezüglich der Beschränkungsstörungen, wenn $p^*(u, v)$ an der Stelle $u = 0, v = 0$ differenzierbar ist und starke Dualität vorliegt. Im Gegensatz zur Abschätzung (2.2) *ist* diese Interpretation symmetrisch: Eine *kleine* Verstärkung der i-ten Ungleichungsbeschränkung (wähle u_i klein und negativ) führt zu einem Anstieg in p^* von etwa $-\lambda_i^* u_i$; eine *kleine* Relaxierung der i-ten Ungleichungsbeschränkung (wähle u_i klein und positiv) führt zu einem Abstieg in p^* von etwa $\lambda_i^* u_i$.
Um die Gleichungen (3.1) zu beweisen, nehmen wir an, dass $p^*(u, v)$ differenzierbar ist und starke Dualität gilt. Für die Störung $u = te_i, v = 0$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor ist, gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}.$$

Die Ungleichung (2.2) besagt für $t > 0$,

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^*,$$

während für $t < 0$ die gegensätzliche Ungleichung gilt. Dies führt für $t \to 0$ mit $t > 0$ zu

$$\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*,$$

während für $t < 0$ wieder die gegensätzliche Ungleichung gilt. Daraus folgt

$$\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} = -\lambda_i^*.$$

Vollkommen analog zeigt man

$$\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} = -\nu_i^*.$$

Die lokale Sensitivitätsaussage (3.1) gibt uns eine quantitative Möglichkeit zu messen, wie aktiv eine Beschränkung am Optimum x^* ist. Ist $f_i(x) < 0$, so ist die Beschränkung inaktiv und daraus folgt, dass die Beschränkung ein klein wenig verstärkt oder abgeschwächt werden kann, ohne dass sich der Optimalwert ändert. Wegen der Komplementaritätsbedingung muss der zugehörige Lagrangemultiplikator also null sein. Sei nun $f_i(x) = 0$, d.h., die i-te Beschränkung ist aktiv am Optimum. Nun sagt uns der i-te optimale Lagrangemultiplikator, *wie* aktiv die Beschränkung ist: Wenn λ_i^* klein ist, bedeutet das, dass die Beschränkung ohne große Wirkung auf den Optimalwert ein klein wenig verstärkt oder relaxiert werden; ist λ_i^* groß, bedeutet das, dass eine kleine Verstärkung oder Abschwächung großen Effekt auf den Optimalwert hat.

Schattenpreisinterpretation

Wir können noch eine einfache geometrische Interpretation des Resultats (3.1) unter ökonomischen Gesichtspunkten angeben. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass uns ein konvexes Optimierungsproblem ohne Gleichungsbeschränkungen vorliegt, welches die Slaterbedingung erfüllt. Die Variable $x \in \mathbb{R}$ bestimmt, wie ein Unternehmen operiert, und die Zielfunktion f_0 gibt die Kosten an, d.h. $-f_0$ ist der Gewinn. Jede Beschränkung $f_i(x) \leq 0$ stellt eine Ressourcenbeschränkung wie zum Beispiel Arbeitskraft, Stahl oder Lagerkapazität dar. Die (negative) gestörte Funktion der optimalen Kosten $-p^*(u)$ gibt uns Information darüber, wie unser Gewinn steigt bzw. fällt, wenn eine kleinere oder größere Menge der Ressource für das Unternehmen zur Verfügung steht. Wenn sie differenzierbar an der Stelle $u = 0$ ist, gilt

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0)}{\partial u_i}.$$

Mit anderen Worten ermöglicht uns λ_i^* zu erfahren, welchen Gewinn das Unternehmen machen könnte, wenn die Verfügbarkeit der i-ten Ressource ein klein wenig ansteigt.
Es folgt, dass λ_i^* einem natürlichen Preis, dem Schattenpreis der Ressource i entsprechen würde, wenn es dem Unternehmen möglich wäre, die Ressource i sowohl zu kaufen als auch zu verkaufen. Man nehme zum Beispiel an, dass ein Unternehmen die Ressource i zu einem Preis kaufen oder verkaufen kann, der niedriger ist als λ_i^*. In diesem Fall wäre es sicherlich besser, die Ressource zu kaufen. Dies würde es dem Unternehmen ermöglichen, in einer Art und Weise zu operieren, bei der mehr Gewinn gemacht wird, als durch den Einkauf Kosten anfallen. Im Gegensatz dazu wäre es besser, einige Einheiten der Ressource zu verkaufen, sobald der Preis oberhalb von λ_i^* liegt. Dies führt zwar zu einem niedrigeren Umsatz, dieser wird aber durch den Verkaufserlös gedeckt.

Literatur

[Riedel(SS2010)] S. Riedel. Geometrische Interpretation. Seminar an TU Chemnitz, SS2010.