

# Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

## Typische Prüfungsfragen

Die folgenden Fragen dienen lediglich der Orientierung und müssen nicht den tatsächlichen Prüfungsfragen entsprechen. Für eine gute Prüfungsleistung werden auch Kenntnisse über die zugehörigen Beweise bzw. Beweisideen vorausgesetzt. Auch Erkenntnisse aus den Übungen können Bestandteil der Prüfung sein.

### Einführung und Motivation

- (1) Nennen Sie typische Aufgabenstellungen für Optimalsteuerungsprobleme mit PDEs.

### Optimale Steuerung linearer elliptischer PDEs

- (2) Nennen Sie eine typische Optimalsteueraufgabe für lineare elliptischer PDEs mit quadratischem Zielfunktional.
- (3) Was ist die schwache Formulierung einer linearen elliptischen PDE?
- (4) Worauf basiert der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für diese PDEs? Welche Voraussetzungen an die Koeffizienten muss man stellen, damit dieser gilt?
- (5) Wie zeigt man die Existenz einer global optimalen Steuerung? Welche Voraussetzungen an  $U_{\text{ad}}$  oder den Kontrollkostenparameter  $\lambda$  muss man stellen?
- (6) Unter welchen Voraussetzungen ist das globale Optimum eindeutig?
- (7) Wie definiert man Fréchet-Differenzierbarkeit?
- (8) Geben Sie die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen für die abstrakte Aufgabe

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } f(u) &= \frac{1}{2} \|Su - y_d\|_H^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_U^2 \\ \text{unter } u &\in U_{\text{ad}} \end{aligned} \quad (10.4)$$

mit HR  $U$  und  $H$  sowie  $S \in \mathcal{L}(U, H)$  und  $y_d \in H$ .

- (9) Wie lautet am konkreten Beispiel  $S^*$ ?
- (10) Wie lauten die Optimalitätsbedingungen als Projektionsformel und als KKT-System (mit Lagrange-Multiplikatoren)?
- (11) Was ist die formale Lagrange-Technik? Wieso ist sie formal?
- (12) Definieren Sie das Subdifferential einer konvexen Funktion und charakterisieren Sie  $\partial \|u\|_{L^1(\Omega)}$ .
- (13) Leiten Sie notwendige und hinreichende Optimalitätsbedingungen einer Optimalsteueraufgabe mit einem Term  $\gamma \|u\|_{L^1(\Omega)}$  her.

## Numerische Verfahren und Fehlerabschätzungen für die optimale Steuerung linearer elliptischer PDEs

- (14) Nennen Sie Verfahren zur Lösung unbeschränkter (ohne Ungleichungen) Optimalsteuerungsaufgaben.
- (15) Wie kann man eine elliptische PDE diskretisieren?
- (16) Welche Operationen benötigt man, um das Gradientenverfahren numerisch zu realisieren?
- (17) Ist das Gradientenverfahren schnell? Wie kann man es verbessern?
- (18) Nennen Sie Verfahren zur Lösung von Optimalsteueraufgaben mit punktwisen Steuerbeschränkungen.
- (19) Was ist eine Komplementaritätsfunktion?
- (20) Wie kann man die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen mit Hilfe der *max*-Komplementaritätsfunktion als nichtlineares Gleichungssystem für  $(u, \mu) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  ausdrücken?
- $$\begin{aligned} S^*(S\bar{u} - y_d) + \lambda \bar{u} + \mu &= 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega \\ \mu - \min\{0, \mu - c(u_a - \bar{u})\} - \max\{0, \mu + c(\bar{u} - u_b)\} &= 0 \quad \text{f.ü. in } \Omega. \end{aligned} \quad (14.7)$$
- (21) Wieso kann man das Newton-Verfahren auf dieses System anwenden? In welchem Sinne ist  $\max\{0, u\}$  differenzierbar?
- (22) Wie schnell konvergiert das verallgemeinerte Newton-Verfahren? Welche Voraussetzungen benötigt man?
- (23) Wie sieht das verallgemeinerte Newton-Verfahren angewendet auf (14.7) aus? Wie kann der Newton-Schritt interpretiert werden?
- (24) Was wird zur numerischen Realisierung des verallgemeinerten Newton-Verfahrens benötigt?
- (25) Auf welchem Resultat basieren Fehlerabschätzungen für die Methode der Finiten Elemente (FEM)?
- (26) Welche Aussage gilt für die Abschätzung des Interpolationsfehlers bei der Lagrange-Interpolation?
- (27) Welche Fehlerabschätzung kann man daraus für die  $H^1(\Omega)$ -Norm bei der Lösung der PDE herleiten?
- (28) Mit welcher Idee kommt man zu einer Fehlerabschätzung in der  $L^2(\Omega)$ -Norm?
- (29) Was ist die grundsätzliche Idee, A-priori-Fehlerabschätzungen für Optimalsteueraufgaben mit punktwisen Steuerbeschränkungen herzuleiten? Welche Rolle spielen dabei die Optimalitätsbedingungen?
- (30) Was unterscheidet die volle von der variationellen Diskretisierung vom algorithmischen Standpunkt und bzgl. der Fehlerabschätzung?