Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Konstruierte Lösung mit Schranken

Wir betrachten die Aufgabe

$$\begin{aligned}
&\text{Minimiere} \quad J(y,u) = \frac{1}{2}\|y - y_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\text{unter} \quad \begin{cases} -\triangle y = \beta\, u & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial n} y + \alpha\, y = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases} \\
&\text{und} \quad u \in U_{\text{ad}}
\end{aligned}$$

mit

$$U_{\text{ad}} := \{u \in L^2(\Omega) : u_a(x) \le u(x) \le u_b(x) \text{ f.ü. in } \Omega\}$$

und der Wahl $\Omega =$ Einheitskreis, $\alpha \equiv 1$ und $\beta \equiv 1$. $\lambda > 0$ ist beliebig.
Wir bezeichnen mit $\widetilde{y}$, $\widetilde{p}$ etc. den Zustand, adjungierten Zustand etc. in Polarkoordinaten. Da alle Funktionen rotationssymmetrisch sein sollen, hängen diese Funktionen nur von der Koordinate r ab. Die Ableitung $\frac{d}{dr}\widetilde{p}$ bezeichnen wir auch mit $\widetilde{p}'$ etc.
Ansatz:

$$\widetilde{p} = \lambda\,(r^2 - C) \tag{1}$$

erfüllt die Randbedingungen, wenn

$$\frac{\partial}{\partial n} p + p\big|_\Gamma = \widetilde{p}'(1) + \widetilde{p}(1) = \lambda\,(2 + 1 - C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = 3.$$

Daraus folgt

$$\widetilde{p} = \lambda\,(r^2 - 3) \tag{2}$$

und

$$\widetilde{u} = P_{U_{\text{ad}}}\Big(-\frac{1}{\lambda}\widetilde{p}\Big) = P_{U_{\text{ad}}}(3 - r^2). \tag{3}$$

Die Schranken sollen z.B. bei $r = 1/4$ und $r = 3/4$ aktiv werden. Wir wählen deshalb

$$u_a := 3 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{39}{16}, \quad u_b := 3 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{47}{16}. \tag{4}$$

Es gilt also

$$\widetilde{u} = \begin{cases} \frac{47}{16} & \text{für } 0 \le r \le \frac{1}{4} \\ 3 - r^2 & \text{für } \frac{1}{4} \le r \le \frac{3}{4} \\ \frac{39}{16} & \text{für } \frac{3}{4} \le r \le 1. \end{cases} \tag{5}$$

Um die Zustandsgleichung zu erfüllen, drücken wir den Laplace-Operator in Polarkoordinaten aus. Wegen der fehlenden Winkelabhängigkeit gilt

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,(r\widetilde{y}') = \widetilde{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\,(r\widetilde{y}') = -r\,\widetilde{u} \quad \Rightarrow \quad r\widetilde{y}' = -\int_0^r r\,\widetilde{u}\,dr + D.$$

Da $r\widetilde{y}'\big|_{r=0} = 0$ gilt, ist $D = 0$. Durch Integration erhält man:

$$r\widetilde{y}' = -\int_0^r r\frac{47}{16}\,dr = -\frac{47}{32}r^2 \quad \text{für } 0 \le r \le \frac{1}{4} \tag{6}$$

und setzt $\alpha := -\frac{47}{32}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{47}{512}$. Auf dem nächsten Intervall ist

$$r\widetilde{y}' = \alpha - \int_{\frac{1}{4}}^r r\,(3-r^2)\,dr = \alpha + \frac{95}{1024} - \frac{3}{2}r^2 + \frac{1}{4}r^4 \quad \text{für } \frac{1}{4} \le r \le \frac{3}{4}. \tag{7}$$

Wir setzen $\beta := \alpha + \frac{95}{1024} - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = -\frac{391}{512}$. Auf dem letzten Intervall gilt

$$r\widetilde{y}' = \beta - \int_{\frac{3}{4}}^r r\frac{39}{16}\,dr = \beta + \frac{351}{512} - \frac{39}{32}r^2\,dr \quad \text{für } \frac{3}{4} \le r \le 1. \tag{8}$$

Wir setzen schließlich $\gamma := \beta + \frac{351}{512} - \frac{39}{32}(1)^2 = -\frac{664}{512}$.
Um eine Gleichung für $\widetilde{y}$ zu erhalten, müssen wir die Ausdrücke (6)–(8) durch r dividieren und nochmals integrieren. Es gilt

$$\widetilde{y} = E + \int_0^r -\frac{47}{32}r\,dr = E - \frac{47}{64}r^2 \quad \text{für } 0 \le r \le \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Die Integrationskonstante E wird später aus der Randbedingung für $\widetilde{y}$ bestimmt. Wir setzen noch $\delta(E) := E - \frac{47}{64}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = E - \frac{47}{1024}$. Auf dem nächsten Intervall ist

$$\begin{aligned}\widetilde{y} &= \delta(E) + \int_{\frac{1}{4}}^r \left(\alpha + \frac{95}{1024}\right)\frac{1}{r} - \frac{3}{2}r + \frac{1}{4}r^3\,dr \\ &= \delta(E) - \frac{1}{1024}\ln\frac{1}{4} + \frac{191}{4096} + \frac{1}{1024}\ln r - \frac{3}{4}r^2 + \frac{1}{16}r^4 \\ &= E + \frac{3}{4096} - \frac{1}{1024}\ln\frac{1}{4} + \frac{1}{1024}\ln r - \frac{3}{4}r^2 + \frac{1}{16}r^4 \quad \text{für } \frac{1}{4} \le r \le \frac{3}{4}. \end{aligned} \tag{10}$$

Wir setzen $\eta(E) := E + \frac{3}{4096} - \frac{1}{1024}\ln\frac{1}{4} + \frac{1}{1024}\ln\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^4$, also $\eta(E) = E - \frac{411}{1024} + \frac{1}{1024}\ln\frac{3}{4} - \frac{1}{1024}\ln\frac{1}{4}$. Auf dem letzten Intervall gilt

$$\begin{aligned}\widetilde{y} &= \eta(E) + \int_{\frac{3}{4}}^r \left(\beta + \frac{351}{512}\right)\frac{1}{r} - \frac{39}{32}r\,dr \\ &= \eta(E) + \frac{40}{512}\ln\frac{3}{4} + \frac{351}{1024} - \frac{40}{512}\ln r - \frac{39}{64}r^2 \\ &= E - \frac{60}{1024} - \frac{1}{1024}\ln\frac{1}{4} + \frac{81}{1024}\ln\frac{3}{4} - \frac{40}{512}\ln r - \frac{39}{64}r^2 \quad \text{für } \frac{3}{4} \le r \le 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Randbedingung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}y + y\big|_\Gamma &= \widetilde{y}'(1) + \widetilde{y}(1) \\ &= \gamma + E - \frac{60}{1024} - \frac{1}{1024}\ln\frac{1}{4} + \frac{1}{1024}\ln\frac{3}{4} - \frac{40}{512}\ln 1 - \frac{39}{64}(1)^2 \\ &= E - \frac{1006}{512} - \frac{1}{1024}\ln\frac{1}{4} + \frac{81}{1024}\ln\frac{3}{4}\end{aligned}$$

liefert die Integrationskonstante

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{1006}{512} + \frac{1}{1024}\ln\frac{1}{4} - \frac{81}{1024}\ln\frac{3}{4} \\
&= \frac{503}{256} + \frac{5}{32}\ln 2 - \frac{81}{1024}\ln 3. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Damit ist $\widetilde{y}$ abschnittsweise bekannt und erfüllt die PDE und die Randbedingung. Schließlich wählen wir $y_\Omega := y + \triangle p$, also

$$
\widetilde{y}_\Omega := \widetilde{y} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\widetilde{p}') = \widetilde{y} + 4\lambda,
$$

so dass auch die adjungierte PDE erfüllt ist.