

Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

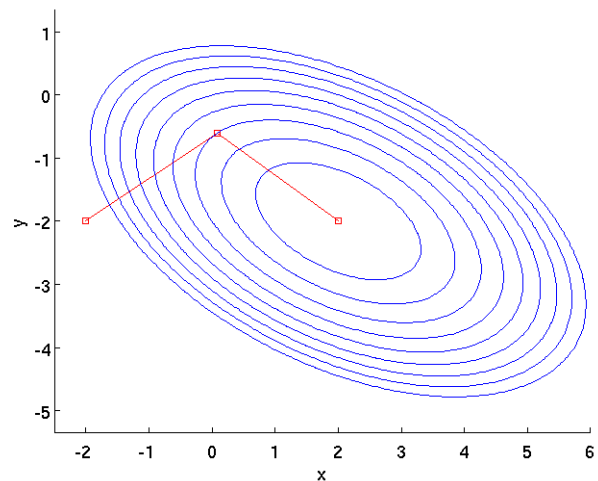
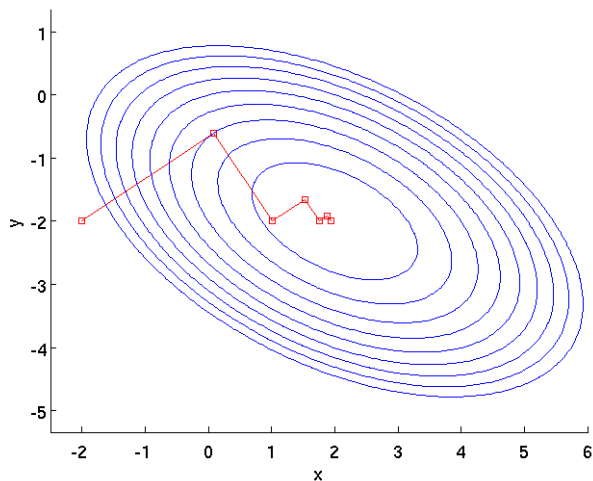
Konvergenzverhalten des Gradientenverfahrens und des Verfahrens der konjugierten Gradienten (cg-Verfahren)

Beispiel aus [1]:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \text{Lösung } x = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \text{Startwert } x_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A sind 2 und 7, also Konditionszahl $\kappa(A) = 3.5$.

Convergence of the method of steepest descent and level curves of $0.5 \cdot x^T A x - b^T x$ Convergence of the conjugate gradient method and level curves of $0.5 \cdot x^T A x - b^T x$



Die Iterierten des Gradientenverfahrens (links) zeigen das typische Zick-Zack-Muster. Das Verfahren der konjugierten Gradienten (rechts) konvergiert in zwei Schritten.

Literatur

- [1] J. Shewchuk. An introduction to the conjugate gradient method without the agonizing pain. Technical report, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 1994. <http://www.cs.cmu.edu/~quake-papers/painless-conjugate-gradient.pdf>.