

KAPITEL 2

Numerische Verfahren und Fehlerabschätzungen für die optimale Steuerung linearer elliptischer PDEs

In diesem Kapitel behandeln wir numerische Verfahren zur Lösung der Probleme aus Kapitel 1, also von konvexen Aufgaben mit quadratischem Zielfunktional (und evtl. zusätzlichem L^1 -Term) und einer linearen elliptischen PDE, mit und ohne Steuerbeschränkungen.

Wir stellen uns auf den Standpunkt, dass wir eine optimale Steuerung in einem Funktionenraum suchen, also eine unendlich-dimensionale Optimierungsaufgabe zu lösen haben. Deshalb formulieren wir die Algorithmen zunächst in Hilberträumen. Zur numerischen Lösung führen wir dann jeden Schritt des Algorithmus' nur diskretisiert (also approximativ) aus.

Diese Sichtweise vertritt den Standpunkt „**zuerst optimieren, dann diskretisieren**“ und hat folgende Vorteile:

- Die Kenntnis der Funktionenräume, in denen die Lösung des Optimalsteuerproblems, aber auch die Lösungen der Teilprobleme im Algorithmus gesucht wird, erlaubt eine geeignete Wahl der Diskretisierung, z.B. geeignete Glattheit von Finite-Elemente-Ansatzfunktionen.
- Bei Bedarf kann die adjungierte PDE anders als die Zustandsgleichung diskretisiert werden, z.B. auf einem gröberen Gitter, mit anderen Ansatzfunktionen oder anderer Stabilisierung.
- Bestimmte Eigenschaften, wie z.B. die Gitterunabhängigkeit eines Verfahrens, erfordern Einblick in das Verhalten eines unendlich-dimensionalen Algorithmus'. Gitterunabhängigkeit eines Verfahrens bedeutet, dass die Anzahl der benötigten Iterationsschritte bis zum Erreichen einer vorgegebenen Genauigkeit mit feiner werdender Diskretisierung nicht anwächst.

Das Gegenstück dieser Strategie ist „**zuerst diskretisieren, dann optimieren**“, bei dem wir das Optimalsteuerungsproblem zuerst diskretisieren und dann einen endlich-dimensionalen Optimierungsalgorithmus darauf anwenden. Dessen Vorteile sind:

- Die Struktur der Teilprobleme, z.B. die Symmetrie des Kuhn-Tucker-Systems, überträgt sich in jedem Fall auf die diskretisierte Aufgabe und erleichtert die Auswahl geeigneter Routinen der numerischen linearen Algebra.
- Man braucht die adjungierte PDE nicht aufzustellen. Jedoch stellen die Lagrangeschen Multiplikatoren, die zur diskretisierten Zustandsgleichung gehören, automatisch eine approximative Lösung der adjungierten PDE dar, wenn man sie richtig interpretiert.

- Fortgeschrittene numerische Verfahren (solche, die mit präkonditionierten iterativen Gleichungslösern arbeiten) benötigen nur die Auswertung von Matrix-Vektor-Produkten, etwa Ay , wobei y die diskretisierte Zustandsvariable und A der Differentialoperator ist. (Da nur die Einschränkung von A auf den endlich-dimensionalen Unterraum der diskreten Zustandsvariablen benötigt wird, kann man A als Matrix darstellen.) Die Matrix A liegt dabei nicht immer explizit (Eintrag für Eintrag) vor, sondern evtl. nur als Funktion, die Matrix-Vektor-Produkte liefert. In diesem Fall können die ebenfalls benötigten Matrix-Vektor-Produkte $A^\top p$ mit Hilfe von Algorithmischer Differentiation (AD) automatisch generiert werden.

Wir werden sehen, wann die beiden Strategien zum selben Verfahren führen (kommutieren). Wir vernachlässigen hier den Aspekt *adaptiver Diskretisierungen*, der aktuelles Forschungsgebiet darstellt.

Ende 14. V

Ende 02.06.2010