

---

## Numerik partieller Differentialgleichungen

### Übung 14

---

#### Hausaufgabe 47: Ergänzung zu Aubin-Nitsche

Es sei  $\ell[\cdot, \cdot]$  eine beschränkte, symmetrische und nichtnegative Bilinearform auf dem Hilbertraum  $L$  (vgl. Voraussetzungen (a) in Satz 14.5).

- (a) Zeigen Sie, dass für  $\ell[\cdot, \cdot]$  die Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt.
- (b) Folgern Sie daraus, dass  $\ell$  eine Seminorm induziert.

(2 Punkte)

#### Hausaufgabe 48: Projektionsfehlerabschätzung zur $L^2(\Omega)$ -Projektion

Sei  $P_K : L^2(K) \rightarrow P_0(K) \cong \mathbb{R}$  die  $L^2(K)$ -orthogonale Projektion auf die konstanten Funktionen, definiert durch

$$(P_K(u) - u, v)_{L^2(K)} = 0 \quad \text{für alle } v \in P_0(K).$$

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 13.7 (Bramble-Hilbert-Lemma) die Existenz einer Konstanten  $c_P$ , sodass die Beziehung

$$\|u - P_K(u)\|_{L^2(K)} \leq c_P |u|_{H^1(K)}$$

für alle  $u \in H^1(K)$  erfüllt ist.

- (b) Folgern Sie daraus, dass für eine Familie von Gittern  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \searrow 0}$  die Abschätzung

$$\|u - P_{\mathcal{T}}(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C h |u|_{H^1(\Omega)}$$

für alle  $u \in H^1(\Omega)$  gilt. Dabei bezeichnet  $P_{\mathcal{T}}$  die elementweise  $L^2(\Omega)$ -orthogonale Projektion. Wird hierbei die Quasi-Uniformität der Familie  $\{\mathcal{T}_h\}_{h \searrow 0}$  benötigt?

## Hausaufgabe 49: FEM für Aufgabe mit Konvektionsterm

- (a) Modifizieren Sie Ihr Programm, um Probleme mit Konvektionsterm

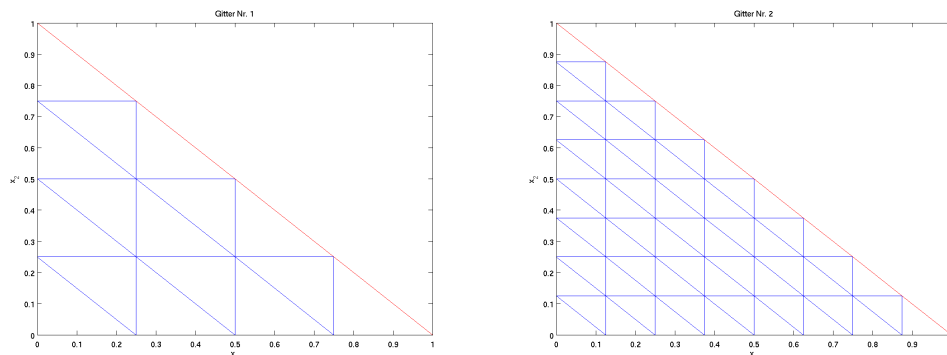
$$\begin{aligned} -\Delta u + \beta \cdot \nabla u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

mit  $\mathbb{P}_1$ -Elementen lösen zu können. Behandeln Sie die homogenen Dirichlet-Randbedingung mit einer der in Übung 13, Hausaufgabe 46 implementierten Variante.

- (b) Implementieren Sie je eine Funktion zur Berechnung von  $\|e_h\|_{L^2(\Omega)}$  und  $\|e_h\|_{H^1(\Omega)}$  (für  $\mathbb{P}_1$ -Elemente). Dabei ist  $e_h$  eine Funktion aus  $V_h$  (repräsentiert durch einen Vektor). Verwenden Sie dazu eine Quadraturformel der Ordnung 2.
- (c) Lösen Sie die Aufgabe mit  $\mathbb{P}_1$ -Elementen für

- $f = 1$ ,  $\beta = (10, 10)^\top$ ,
- $f = 1$ ,  $\beta = (20, 20)^\top$  und
- $f = 1$ ,  $\beta = (100, 100)^\top$

auf dem Einheitssimplex. Verwenden Sie dazu die in der Datei `Mesh_5_simplexg_Connectivity_P1_Prolong.mat` gegebenen Gitter-Daten. Es handelt sich dabei um 5 Gitter, welche durch reguläre, uniforme Verfeinerung auseinander hervorgehen



d.h.  $h_i = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$  für  $i = 1, \dots, 5$ .

Zusätzlich sind noch Prolongationsoperatoren gegeben, welche eine auf einem groben Gitter gegebene Funktion auf ein feineres Gitter interpolieren, d.h. mit `prolong{i}*u` wird die Funktion  $u \in V_{h_{i-1}}$  in den Raum  $V_{h_i}$  übertragen.

Für diese Problemdata ist keine analytische Lösung bekannt. Als Näherung für  $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  verwendet man häufig  $\|u_{h^*} - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ , wobei  $u_{h^*}$  die diskrete Lösung auf dem feinsten Gitter bezeichnet. Plotten Sie die Fehler  $\|u_{h^*} - u_h\|_{L^2(\Omega)}$  und  $\|u_{h^*} - u_h\|_{H^1(\Omega)}$  in Abhängigkeit von  $h$  in einen doppelt logarithmischen Plot und schätzen Sie die Konvergenzordnung. Was können Sie für die Lösung auf den groben Gittern beobachten?

(5 Punkte)

### Aufgabe 13: Eigenwerte und Kondition von Massen- und Steifigkeitsmatrix

Es sei

- $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  eine uniforme Familie von Gittern auf dem polyedrischen Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$
- auf jedem Gitter  $\mathcal{T}$  sei  $\{(K, P_K, \Sigma_K)\}_{K \in \mathcal{T}}$  eine affine Familie von FE mit dem gemeinsamen Referenzelement  $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ . Der zugehörige FE-Raum  $V_h$  sei  $V$ -konform, d.h.  $V_h \subset V$ .
- $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  die symmetrische, beschränkte und elliptische Bilinearform zum Differentialoperator  $L$  der Ordnung 2, sowie  $V = H^1(\Omega)$  und

$$A \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \text{mit} \quad A_{ij} = a[\varphi_i, \varphi_j]$$

die Steifigkeitsmatrix und

$$M \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad \text{mit} \quad M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, dx$$

die Massenmatrix. Dabei sind  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  ( $m = N_{\text{global\_dofs}}$ ) die globalen Freiheitsgrade, d.h. es gilt  $V_h = \text{lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$  und  $\dim V_h = m$ .

Zeigen Sie

- (a) Es existieren  $\underline{c}_M, \bar{c}_M$  mit

$$\underline{c}_M \cdot h^N \leq \lambda_{\min}(M) \leq \lambda_{\max}(M) \leq \bar{c}_M \cdot h^N.$$

Folgern Sie  $\kappa_2(M) = \mathcal{O}(1)$  daraus.

- (b) Es existieren  $\underline{c}_A, \bar{c}_A$  mit

$$\underline{c}_A \cdot \lambda_{\min}(M) \leq \lambda_{\min}(A) \leq \lambda_{\max}(A) \leq \bar{c}_A \cdot \lambda_{\max}(M) \cdot h^{-2}$$

Folgern Sie  $\kappa_2(A) = \mathcal{O}(h^{-2})$  daraus.

### Aufgabe 14: Konvergenzeigenschaften für $u \notin H^2(\Omega)$

Untersuchen Sie experimentell die Konvergenzeigenschaften einer konformen Finite-Elemente-Methode für den Fall, dass  $u$  nicht in  $H^2(\Omega)$  liegt.