

Numerik partieller Differentialgleichungen

Quadraturformeln

schwache Form	lokale Beiträge der Zelle K
$\int_{\Omega} \nabla \varphi_i^T A(x) \nabla \varphi_j dx$	$ \det(B_K) \sum_{i=1}^q \omega_{i,\hat{K}} [B_K^{-T} \nabla \hat{p}_k(\xi_{i,\hat{K}})]^T A(T_K(\xi_{i,\hat{K}})) [B_K^{-T} \nabla \hat{p}_l(\xi_{i,\hat{K}})]$
$\int_{\Omega} \varphi_i \beta(x) \cdot \nabla \varphi_j dx$	$ \det(B_K) \sum_{i=1}^q \omega_{i,\hat{K}} \hat{p}_k(\xi_{i,\hat{K}}) \beta(T_K(\xi_{i,\hat{K}})) \cdot [B_K^{-T} \nabla \hat{p}_l(\xi_{i,\hat{K}})]$
$\int_{\Omega} \varphi_i c_0(x) \varphi_j dx$	$ \det(B_K) \sum_{i=1}^q \omega_{i,\hat{K}} \hat{p}_k(\xi_{i,\hat{K}}) c_0(T_K(\xi_{i,\hat{K}})) \hat{p}_l(\xi_{i,\hat{K}})$
$\int_{\Omega} f(x) \varphi_i dx$	$ \det(B_K) \sum_{i=1}^q \omega_{i,\hat{K}} f(T_K(\xi_{i,\hat{K}})) \hat{p}_k(\xi_{i,\hat{K}})$

Tabelle 1: Transformation der Gebietsintegrale in der schwachen Form auf eine Referenzzelle und Approximation durch eine Quadraturformel

schwache Form	lokale Beiträge der Zelle K
$\int_{\Gamma} \varphi_i \alpha(s) \varphi_j ds$	$\frac{ F_j }{ \hat{F}_j } \sum_{i=1}^{q'} \omega_{i,\hat{F}_j} \hat{p}_k(\xi_{i,\hat{F}_j}) \alpha(T_K(s)) \hat{p}_l(\xi_{i,\hat{F}_j})$
$\int_{\Gamma} g(s) \varphi_i ds$	$\frac{ F_j }{ \hat{F}_j } \sum_{i=1}^{q'} \omega_{i,\hat{F}_j} g(T_K(s)) \hat{p}_k(\xi_{i,\hat{F}_j})$

Tabelle 2: Transformation der Randintegrale in der schwachen Form auf eine Referenzfacette und Approximation durch eine Quadraturformel

Die **Ordnung** $r \in \mathbb{N}$ einer Quadraturformel

$$\int_{\hat{K}} g(x) dx \approx \sum_{i=1}^q \omega_{i,\hat{K}} g(\xi_{i,\hat{K}})$$

ist der maximale Index, sodass für alle Polynome $g \in P_r(\hat{K})$ Gleichheit gilt (analog für Randintegrale). Die $\omega_{i,\hat{K}}$ heißen **Gewichte** und die Punkte $\xi_{i,\hat{K}}$ die **Stützstellen** der Formel.

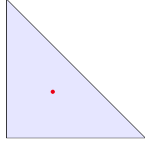
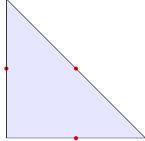
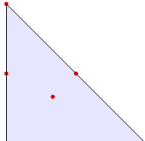
r	q		Koordinaten	Anzahl	Gewichte
1	1		$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	1	$ \widehat{K} $
2	3		$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	3	$\frac{1}{3} \widehat{K} $
3	7		$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ $(1, 0, 0)$	1 3 3	$\frac{9}{20} \widehat{K} $ $\frac{2}{15} \widehat{K} $ $\frac{1}{20} \widehat{K} $

Tabelle 3: Quadraturformeln auf Dreiecken mit baryzentrischen Koordinaten. Bei Anzahlen > 1 ergeben sich die Koordinaten der weiteren Quadraturpunkte durch zyklische Vertauschung.

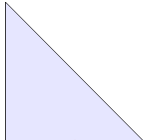
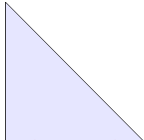
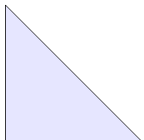
r	q		Koordinaten	Anzahl	Gewichte
1	1		$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	1	$ \widehat{F}_j $
3	2		$(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}, 0)$ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}, 0)$	1 1	$\frac{1}{2} \widehat{F}_j $ $\frac{1}{2} \widehat{F}_j $
5	3		$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, 0)$ $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}, 0)$ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	1 1 1	$\frac{5}{18} \widehat{F}_j $ $\frac{5}{18} \widehat{F}_j $ $\frac{8}{18} \widehat{F}_j $

Tabelle 4: Quadraturformeln auf Dreiecksanten mit baryzentrischen Koordinaten. Formeln für die anderen Kanten entstehen jeweils durch zyklisches Vertauschen der Koordinaten.