Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 13. Juli 2009

Höhere Mathematik I.2

Übung 22: Differenziation von Funktionen mehrerer Variabler

1. Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen sowie den Gradienten folgender Funktionen:
   a) $f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_1^4 x_2^2$ an der Stelle $x_1 = 1,\ x_2 = 2$,
   b) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 e^{x_2} + \arctan x_3$,
   c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$!
   Sind die Funktionen total differenzierbar?

2. Sei $g(t) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$. Welche Konsequenzen hätte es, wenn in der Kettenregel
$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}$$
   statt „∂“ einfach „d“ geschrieben und mit den partiellen Differenzialquotienten wie mit Brüchen gerechnet würde, wie das bei gewöhnlichen Differenzialquotienten zulässig ist?

3. Sei $z = 3x^2 + 2xy$ mit $x = \sin t$ und $y = \cos t$. Berechnen Sie $\dot{z} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$
   a) mit der Kettenregel,
   b) durch Einsetzen!

4. Durch ein Gelände mit der Höhe $h(x,y) = \dfrac{1000 + x + y + \sqrt{xy + 76}}{10}$ werde längs der Gerade $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine Straße gebaut. Bestimmen Sie den Anstieg der Straße im Geländepunkt $(x,y) = (4,6)$!

5. Sei $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   a) Zeichnen Sie das Niveaulinienbild!
   b) Um was für eine Fläche handelt es sich bei $z = f(x,y)$?
   c) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$!
   d) Ermitteln Sie die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(3,4)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$!
   e) Ermitteln Sie mit Hilfe der Richtungsableitung, wie sich $f(x,y)$ näherungsweise ändert, wenn x von 3 auf 3.01 und y von 4 auf 4.024 wächst? Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der tatsächlichen Änderung!
   f) In welche Richtung wächst $f(x,y)$ am stärksten? Argumentieren Sie sowohl mit dem Gradienten als auch mit der geometrischen Bedeutung der Funktion!
   g) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt $(3,4,5)$!

6. Berechnen Sie für die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ die partiellen Ableitungen sowie die Ableitung in Richtung der Geraden $y = x$ im Koordinatenursprung!