

4. Wiederholerübung Höhere Mathematik 1.1

**Homogene lineare Gleichungssysteme und Rang**

1. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ a) \quad 3x + y - 5z = 0, \quad b) \quad 3x + y - 5z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \end{array} .$$

2. Gegeben sei das Gleichungssystem  $\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{array}$ .

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!  
b) Geben Sie drei linear unabhängige spezielle Lösungen des Gleichungssystems an!  
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lösungsmenge, der Anzahl der Variablen und Gleichungen und dem Rang der Koeffizientenmatrix?

**Inhomogene Lineare Gleichungssysteme**

1. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Gleichungssysteme

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 4 \\ a) \quad 3x + y - 5z = 5, \quad b) \quad 3x + y - 5z = 5 \\ 2x - 3y + 3z = 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2y + 3z = 4 \\ 5x - 3y + z = 8 \end{array} ,$$

Interpretieren Sie die Ergebnisse geometrisch!

2. Gegeben sei das Gleichungssystem  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ .

- a) Geben Sie, sofern das möglich ist, eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der  $x_4$  und  $x_5$  frei gewählt werden können!  
b) Geben Sie, sofern das möglich ist, eine Darstellung der allgemeinen Lösung an, in der  $x_3$  und  $x_4$  frei gewählt werden können!  
c) Geben Sie die spezielle Lösung an, für die  $x_1 = 1$  und  $x_2 = -1$  gilt!  
d) Gibt es eine spezielle Lösung, die in allen Komponenten positiv und ganzzahlig ist?  
e) Geben Sie die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an!

3. Gegeben sei das Gleichungssystem  $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 9x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + ax_5 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 3x_5 = b \end{array}$ .

- a) Wenden Sie auf das Gleichungssystem den Gaußschen Algorithmus an! Für welche Werte der Parameter  $a$  und  $b$  ist das Gleichungssystem lösbar? Geben Sie im Falle der Existenz die allgemeine Lösung des Gleichungssystems an!  
b) Wie viele frei wählbare Parameter enthält die allgemeine Lösung des zu dem gegebenen Gleichungssystem zugehörigen homogenen Systems? Geben Sie diese Lösung an!