Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 20. April 2009

Höhere Mathematik I.2

Übung 4: l'Hospitalsche Regel, zweite Ableitungen

1. Wenden Sie die l'Hospitalsche Regel auf folgende Grenzwerte an:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$, b) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\tan\dfrac{x}{2}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$, d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x}$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$,
   f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$!

2. (K. Meyberg/P. Vachenauer: Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. 6. Aufl. Springer 2003, S. 129)

   Die Molwärme eines zweiatomigen Gases ist bei festem Volumen als Funktion der absoluten Temperatur T gegeben durch $c(T) = R\dfrac{(T_0/T)^2\,\mathrm{e}^{T_0/T}}{\left(\mathrm{e}^{T_0/T}-1\right)^2}$ mit der Gaskonstanten R und der charakteristischen Temperatur T_0.

   Berechnen Sie die Grenzwerte von $c(T)$ für $T\to 0$ und $T\to\infty$!

3. Wie in Übung 2, Aufgabe 4 wird ein Fahrzeug betrachtet, dass sich nach $s(t) = 20+10t+100t^2-30t^3$ bewegt. Dabei wird der Weg s in Kilometern, die Zeit t in Stunden gemessen.
   a) Berechnen Sie die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit! Ermitteln Sie ihren Zahlwert in $\mathrm{km/h^2}$ sowie in $\mathrm{m/s^2}$ zum Zeitpunkt $t=1$!
   b) Von welchem Zeitpunkt an wird das Fahrzeug langsamer?
   c) Von wann an fährt das Fahrzeug rückwärts?

4. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ und ihrer ersten und zweiten Ableitung für $x\to 0$!

5. Ein Massepunkt schwingt nach $x(t)=A\sin\omega t$ um seine Ruhelage. Bestimmen Sie seine Geschwindigkeit und Beschleunigung beim Durchlaufen der Ruhelage und der größten Auslenkung! Zeigen Sie, dass die Bewegung der Differenzialgleichung $\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0$ genügt!

6. Ein Massepunkt schwingt nach $x(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$ um seine Ruhelage. Zeigen Sie, dass die Bewegung der Differenzialgleichung $\ddot{x}(t)+\omega^2 x(t)=0$ genügt! Zu welchen Zeitpunkten durchläuft der Massepunkt die Ruhelage bzw. die größte Auslenkung? Wie groß ist die größte Auslenkung?

   Hinweis: $\sin\arctan x = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos\arctan x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$