

Höhere Mathematik I.2

Übung 2: Grenzwerte, Stetigkeit, Ableitung

1. Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)^2}{1-x^2}$ und b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$!

2. Berechnen Sie die folgenden einseitigen Grenzwerte:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}$, c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$, d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2}$, e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}}$, f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$!

Existieren auch die Grenzwerte?

3. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen stetig:

a) $f(x) = |x|$, b) $f(x) = \frac{(1-x)^2}{1-x^2}$, c) $f(x) = \cos x \sin x$, d) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$?

4. Ein Fahrzeug bewegt sich nach $s(t) = 20 + 10t + 100t^2 - 30t^3$. Dabei wird der Weg s in Kilometern, die Zeit t in Stunden gemessen.

a) Differenzieren Sie die Funktion $s(t)$! Welchen Weg hat das Fahrzeug nach einer Stunde, d.h. zum Zeitpunkt $t = 1$, zurückgelegt, mit welcher Geschwindigkeit fährt es da?

b) Approximieren Sie die Funktion $s(t)$ in der Nähe von $t = 1$ durch eine Gerade! Welchen Weg hätte das Fahrzeug nach 61, 66, 90 bzw. 120 Minuten zurückgelegt, wenn es die Geschwindigkeit, mit der es nach einer Stunde fährt, beibehalten würde? Vergleichen Sie die Werte mit dem tatsächlich zurückgelegten Weg!

5. Für die Produktion von $x \leq 2000$ Einheiten einer Ware laute die Gesamtkostenfunktion $K(x) = 1500 + 5x - 0.001x^2$.

a) Ermitteln Sie die durchschnittlichen Kosten pro Einheit, die bei der Produktion von x Einheiten entstehen (Durchschnittskostenfunktion) sowie die Grenzkostenfunktion!

b) Bestimmen Sie für $x = 1000$ und $x = 1900$ jeweils die Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten sowie die tatsächlichen Mehrkosten für die Produktion einer zusätzlichen (d.h. der 1001. bzw. 1901.) Einheit!

6. Differenzieren Sie nach x :

a) $y = x + \sqrt{x^2 + 3}$, b) $y = x \sin(ax + 3)$, c) $y = \frac{\cos x}{x^2}$, d) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$
e) $y = (\sqrt{a} - \sqrt{bx+c})^2$, f) $y = \frac{(x+1) \sin(x+1)}{(x-1)^2}$!