

## Höhere Mathematik I.1

### Aufgabenkomplex 5: Folgen und Reihen, Finanzmathematik

**Letzter Abgabetermin: 23. Juni 2009**

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 5“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

- Gegeben sei die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = 2 - \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ .
  - Geben Sie den Grenzwert  $a$  der Folge sowie ein  $n_0(\varepsilon)$  an, so dass  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n > n_0(\varepsilon)$  gilt.
  - Geben Sie das kleinste  $n$  an, für das  $a_n > 1,99$  gilt.
- Ermitteln Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen  $(a_n)$  und die Reihen  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  konvergieren:
  - $a_n = 1 + \cos \frac{\pi}{n+1}$ ,
  - $a_n = \left(\frac{4}{3}\right)^{-n}$ ,
  - $a_n = \sin \frac{(-n)^3}{n^2+1}$ ,
  - $a_n = \frac{2^n + (-1)^n}{3^n}$  !

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Grenzwerte bzw. Summen!

- Für die Berechnung eines „effektiven Jahreszinses“ bei Krediten schreibt § 6 Abs. 2 der Preisangabenverordnung vor: „Es gilt die exponentielle Verzinsung auch im unterjährigen Bereich.“ Das bedeutet, dass die Leibnizsche Zinseszinsformel für beliebige, auch gebrochene Vielfache der Zinsperiode von einem Jahr anzuwenden ist. Beim Nominalzins wird dagegen üblicherweise für verbleibende Jahresbruchteile unter einem Jahr die einfache Verzinsung angewandt.

Ein Darlehen in Höhe von 11 000 € ist 15 Monate nach seiner Auszahlung einschließlich der Zinsen für die gesamte Laufzeit zur Rückzahlung fällig. Ermitteln Sie

- den Fälligkeitsbetrag bei einem effektiven Jahreszins von 6 %,
  - den Fälligkeitsbetrag bei einem Nominalzins von 6 % p.a.,
  - den effektiven Jahreszins bei einem Fälligkeitsbetrag 12 000 €,
  - den Nominalzins bei einem Fälligkeitsbetrag 12 000 € !
- Wie hoch ist der jährliche Zinssatz, wenn sich ein Guthaben in 30 Jahren verdreifacht?
    - Jemand möchte ein Guthaben von 50 000 € ansparen, dazu zahlt er am Anfang jeden Jahres einen Betrag von 2 000 € auf ein (am Anfang leeres) Konto ein. Nach wievielen Jahren hat er sein Ziel erreicht, wenn das Guthaben mit 5,5 % p.a. verzinst wird?
    - Jemand möchte seinem Konto 3 Jahre lang am Ende jeden Monats 100 € entnehmen. Das Konto wird mit 0,5 % pro Monat verzinst. Wie hoch muss das Guthaben am Beginn sein, falls keine Einzahlungen vorgenommen werden?

5. Für ein Produkt stehen 3 Finanzierungsmöglichkeiten zur Auswahl:

- a) Sofortige Zahlung von 25 000 €,
- b) Sofortige Anzahlung von 5000 €, anschließend Zahlung von 8 jährlichen Raten zu je 3000 Euro,
- c) Zahlung von 9 jährlichen Raten, bestehend aus 8 Raten zu je 3000 € und einer Abschlussrate zu 5000 €, wobei die 1. Rate sofort gezahlt werden soll.

Bestimmen Sie die Barwerte aller Angebote zum aktuellen Zeitpunkt bei einem Kalkulationszins von 4 % p.a.! Welches der Angebote ist für den Käufer das günstigste?

### Zusatzaufgabe

**Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Stellen Sie jede der Folgen aus Aufgabe 2 grafisch dar. Plotten Sie dazu jeweils die Werte für  $n = 0$  bis  $n = 20$ , kennzeichnen Sie die Punkte der Folgen mit Markern.
2. Berechnen Sie die Partialsummen der Reihen aus Aufgabe 2 jeweils für  $n = 100$ ,  $n = 10000$  und  $n = 1000000$ .
3. Für einen Grundstückskauf wurde ein Darlehen von 100000 Euro aufgenommen. Es ist mit 4 % zu verzinsen, innerhalb des Jahres wird die einfache Zinsrechnung angewandt. Zins und Tilgung sind monatlich nachträglich in einer Rate von 500 Euro zu erbringen. Erstellen Sie ein MATLAB-File, das einen Zahlungsplan mit Angabe der jeweiligen Restschuld für die ersten 5 Jahre der Laufzeit des Darlehens ausgibt. Nutzen Sie eine for-Schleife sowie formatierte Ausgabe.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

## Hinweise zur MATLABaufgabe

### Darstellen von Folgen

Folgen können genau wie Funktionen geplottet werden (vgl. Aufgabenkomplex 1). Man sollte dabei den dritten Parameter des `linspace`-Befehls so wählen, dass nur an den gewünschten ganzzahligen Punkten auch Werte geplottet werden. So kann man zum Beispiel mit den Befehlen

```
>> n=linspace(0,4,5)
>> a=n.^3-2*n
>> plot(n,a,'-x')
```

die ersten 5 Werte der Folge  $a_n = n^3 - 2n$  mit Verbindungslinien darstellen.

### Summen

Die Summe der Einträge eines Vektors kann mit

```
>> sum(a)
```

berechnet werden.

### Formatierte Ausgabe

Zur Darstellung von Tabellen kann der folgende Befehl (mehrfach) genutzt werden:

```
>> fprintf('Monat:%3.0f,Rate:%7.2f, Zins:%7.2f, Tilgung:%7.2f,
Restschuld:%10.2f\n',m,r,z,t,s)
```

Der Text zwischen den beiden `'`-Zeichen wird ausgegeben. `%3.0f` bedeutet, dass die nächste der Zahlen nach dem ersten Komma mit 3 Zeichen, davon 0 Stellen nach dem Komma eingefügt wird. `\n` bewirkt den Start einer neuen Zeile.

### m-Files, for-Schleifen

Mehrere Befehle können in einem m-File zusammengefasst werden. Die Ausführung der Befehle eines m-Files `beispiel.m` wird durch den Aufruf

```
>> beispiel
```

gestartet, dazu muss sich das m-File im aktuellen Arbeitsverzeichnis befinden. Mit dem in MATLAB integrierten Editor (im Menü unter `File ... New ... M-File` erreichbar) lassen sich solche Dateien einfach erstellen.

Sich wiederholende Befehle können mit einer for-Schleife abgekürzt werden.

```
>> betrag=1000; zinssatz=1.04; fprintf('\n')
>> for i=1:3
>>     betrag=betrag*zinssatz;
>>     fprintf('%7.2f\n',betrag)
>> end
```

For-Schleifen können auch ohne den Einsatz von m-Files benutzt werden, allerdings lassen sie sich innerhalb von m-Files meist bequemer programmieren.