

Höhere Mathematik I.2

**Aufgabenkomplex 5: Inhomogene Differenzialgleichungssysteme;
Lineare Optimierung**

Letzter Abgabetermin: 09. Juli 2009

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 5“
kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

1. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{F} \sin t$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
 $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$!

2. Wenden Sie die Methode des Ansatzes vom Typ der rechten Seite auf die Differenzialgleichungssysteme a) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 4 \\ \dot{y} = 3x + y - 10 \end{cases}$ und b) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 4 \\ \dot{y} = x + y - 10 \end{cases}$ an! Was stellen Sie fest?

3. Bestimmen Sie unter den Nebenbedingungen $2x_1 + 3x_2 \leq 21$, $3x_1 + 2x_2 \leq 24$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 5$ die Optima der Zielfunktionen

a) $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$,

b) $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$,

c) $z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die beim Simplexverfahren durchlaufenen Basislösungen jeweils in die Skizze der grafischen Lösung ein! Für welche Argumente x_1, x_2 werden die Optima erreicht?

4. In einer Kompostanlage werden 2 Sorten Pflanzsubstrat hergestellt. Für die Herstellung von 1 hl Substrat Sorte A werden u.a. 40 l Füllstoffe und 20 l Kompost, für 1 hl Substrat Sorte B werden u.a. 40 l Füllstoffe und 40 l Kompost benötigt. Pro Hektoliter Substrat werden bei der Sorte A 3 € und bei der Sorte B 5 € Erlöst. Es stehen höchstens 800 hl Füllstoffe zur Verfügung, sollen aber mindestens 880 hl Kompost verwendet werden. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Erlös maximiert werden.

Stellen Sie das mathematische Modell auf und lösen Sie die Aufgabe auf grafischem Wege!

5. Aus Trauben-, Orangen- und Apfelsaft werden 3 verschiedene Sorten Multivitaminsaft hergestellt. 5 l Multivitaminsaft enthalten bei der Sorte A 1 l Trauben-, 3 l Orangen- und 1 l Apfelsaft, bei der Sorte B 4 l Orangen- und 1 l Apfelsaft und bei der Sorte C 3 l Orangen- und 2 l Apfelsaft. Pro Liter wird ein Gewinn von 20 Cent bei Sorte A, 15 Cent bei Sorte B und 10 Cent bei Sorte C erzielt. Es stehen 500 l Trauben-, 1750 l Orangen- und 550 l Apfelsaft zur Verfügung.

Stellen sie das mathematische Modell für die Maximierung des Gewinns auf und lösen Sie dieses mit dem Simplexverfahren! Wieviel Liter der einzelnen Sorten sind herzustellen? Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Zusatzaufgabe auf Seite 2

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgende Aufgabe mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. a) Bestimmen Sie (ohne MATLAB) die reelle Lösung von

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(vgl Übung 16, Aufgabe 3) für $\omega \neq \pm 1$ in Abhängigkeit von ω .

- b) Zeichnen Sie die x -Komponente der Lösung für $\omega = 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}$ über dem Intervall $[0, 10\pi]$. In Übung 16, Aufgabe 3 wurde für $\omega = 1$ als Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

angegeben. Ermitteln Sie auch hierzu die Lösung der Anfangswertaufgabe und zeichnen Sie deren x -Komponente ein.

- c) Wie lautet die Periodenlänge der unter (a) bestimmten Lösung für rationale ω (in Abhängigkeit von ω)?

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Aufgabenkomplex 5: Inhomogene Differenzialgleichungssysteme; Lineare Optimierung

Letzter Abgabetermin: 09. Juli 2009

1. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + \vec{F} \sin t$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
 $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$!

Lösung:

Homogenes System:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(2-\lambda) + (2-\lambda) = (\lambda^2+4)(2-\lambda) = 0, \quad \lambda_{1/2/3} = \pm 2i; 2.$$

Zu $\lambda_{1/2} = \pm 2i$:

$x(t)$ kann in der Form $x(t) = C \cos 2t + D \sin 2t$ angesetzt werden. Die erste Gleichung lautet $\dot{x} = 2z$, so dass sich $z(t) = \dot{x}(t)/2 = -C \sin 2t + D \cos 2t$ ergibt. $y(t)$ hängt nicht von $x(t)$ und $z(t)$ ab,

folglich ist $\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 0 \\ \cos 2t \end{pmatrix}$ die zu dem Eigenwertpaar $\lambda_{1/2} = \pm 2i$ gehörige

Lösung des homogenen Differenzialgleichungssystems.

EV zu $\lambda_3 = 2$:

$$\begin{array}{ccc} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{EV } E \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung des homogenen Systems: $\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 0 \\ \cos 2t \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

Inhomogenes System:

Ansatz: $\vec{x}(t) = \vec{A} \sin t + \vec{B} \cos t$, $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{A} \cos t - \vec{B} \sin t$

Einsetzen in inhomogenes System:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \sin t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \sin t$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \cos t - B_1 \sin t \\ A_2 \cos t - B_2 \sin t \\ A_3 \cos t - B_3 \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A_3 \sin t + 2B_3 \cos t + 6 \sin t \\ 2A_2 \sin t + 2B_2 \cos t + 5 \sin t \\ -2A_1 \sin t - 2B_1 \cos t + 3 \sin t \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lcl}
 \text{sint :} & -B_1 = 2A_3 + 6 & -2A_3 - B_1 = 6 \\
 \text{cost :} & A_1 = 2B_3 & A_1 - 2B_3 = 0 \\
 \text{sint :} & -B_2 = 2A_2 + 5 & -2A_2 - B_2 = 5 \\
 \text{cost :} & A_2 = 2B_2 & A_2 - 2B_2 = 0 \\
 \text{sint :} & -B_3 = -2A_1 + 3 & 2A_1 - B_3 = 3 \\
 \text{cost :} & A_3 = -2B_1 & A_3 + 2B_1 = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 6 \\
 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\
 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 6 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3
 \end{array} \\
 \begin{array}{cccccc|c}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Systems: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$

allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ -\sin 2t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 0 \\ \cos 2t \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$$

Anfangsbedingung:

$$\vec{x}(0) = C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 C+2= 3, \quad C= 1 \\
 E-1= 1, \quad E= 2 \\
 D+1=-2, \quad D=-3
 \end{array}$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ 0 \\ -\sin 2t \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 0 \\ \cos 2t \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$$

2. Wenden Sie die Methode des Ansatzes vom Typ der rechten Seite auf die Differentialgleichungssysteme a) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 4 \\ \dot{y} = 3x + y - 10 \end{cases}$ und b) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y - 4 \\ \dot{y} = x + y - 10 \end{cases}$ an! Was stellen Sie fest?

Lösung:

a) **homogen:** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0, \quad \lambda_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

EV zu $\lambda_1 = 4$:
$$\begin{array}{cc} -2 & 2 \\ \hline 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{array} \text{ EV } C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = -1$:
$$\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ \hline 3 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \text{ EV } D \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung des homogenen Dgl.systems: $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + D \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$

inhomogen:

Inhomogenität („rechte Seite“): $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$, Ansatz: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einsetzen in inhomogenes Dgl.system:

$$\begin{array}{l} \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} 2A_1 + 2A_2 = 4 \quad | - \\ 3A_1 + A_2 = 10 \quad | \cdot 2 \\ 6A_1 + 2A_2 = 20 \quad | + \\ 4A_1 = 16 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ A_1 = 4, A_2 = -2 \end{array}$$

spezielle Lösung des inhomogenen Dgl.systems: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

allgemeine Lösung des inhomogenen Dgl.systems: $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + D \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$,

d.h. $x(t) = Ce^{4t} - 2De^{-t} + 4$
 $y(t) = Ce^{4t} + 3De^{-t} - 2$

b) **homogen:** $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3) = 0, \quad \lambda_{1/2} = \begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases}$$

EV zu $\lambda_1 = 3$:
$$\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ \hline 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{array} \text{ EV } C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_2 = 0$:
$$\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \text{ EV } D \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

allgemeine Lösung des homogenen Dgl.systems: $\vec{x} = C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + D \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

inhomogen:

Inhomogenität („rechte Seite“): $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$, Ansatz: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Einsetzen in inhomogenes Dgl.system:

$$\begin{array}{l} \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{l} 2A_1 + 2A_2 = 4 \quad | - \\ A_1 + A_2 = 10 \quad | \cdot 2 \\ 2A_1 + 2A_2 = 20 \quad | + \\ 0 = 16, \text{ Widerspruch, GS unlösbar} \end{array} \end{array}$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems kann also in diesem Fall nicht einfach in Form der rechten Seite gesucht werden.

Es liegt der Resonanzfall vor. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems lautet $\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + D \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 16t + 14 \\ -16t \end{pmatrix}$ (muss bei der Bearbeitung des Aufgabenkomplexes nicht ermittelt werden).

3. Bestimmen Sie unter den Nebenbedingungen $2x_1 + 3x_2 \leq 21$, $3x_1 + 2x_2 \leq 24$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 5$ die Optima der Zielfunktionen

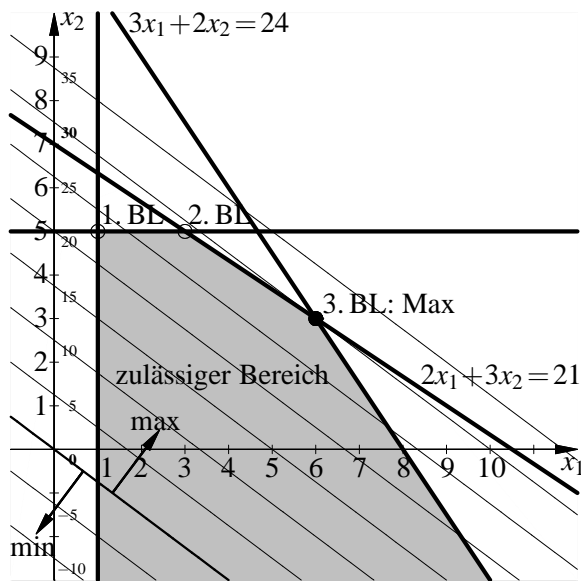
- a) $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$,
- b) $z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$,
- c) $z = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$

jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die beim Simplexverfahren durchlaufenen Basislösungen jeweils in die Skizze der grafischen Lösung ein! Für welche Argumente x_1, x_2 werden die Optima erreicht?

Lösung:

Grafische Lösung

a), b)



Niveaulinien der Zielfunktion $z = 3x_1 + 4x_2$

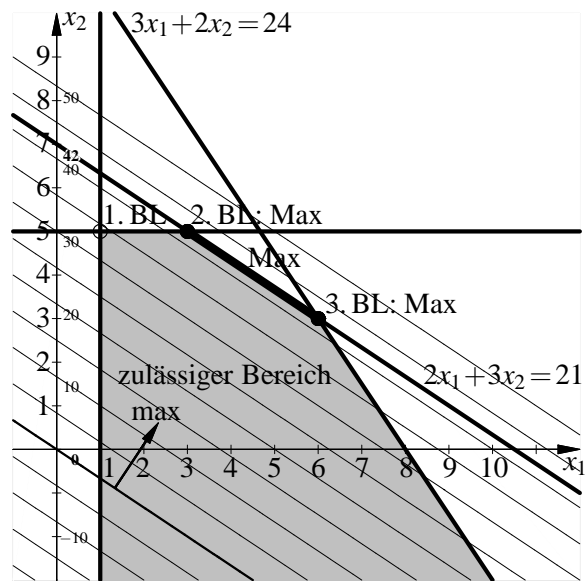
Maximierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach rechts oben. Der zulässige Bereich wird verlassen im Schnittpunkt der Geraden $2x_1 + 3x_2 = 21$ und $3x_1 + 2x_2 = 24$:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 3x_2 = 21 & | \cdot 3 & \\ 3x_1 + 2x_2 = 24 & | \cdot 2 & \\ \hline 6x_1 + 9x_2 = 63 & & | + \\ 6x_1 + 4x_2 = 48 & & | - \\ \hline & & 5x_2 = 15, \quad x_2 = 3, \quad x_1 = 6 \end{array}$$

Also wird das Maximum für $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ angenommen, der maximale Zielfunktionswert beträgt 30.

Minimierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach links unten. Das ist beliebig weit möglich, die Zielfunktion ist über dem zulässigen Bereich nach unten unbeschränkt und die Aufgabe damit nicht lösbar.

c)



Niveaulinien der Zielfunktion $z = 4x_1 + 6x_2$

Maximierung erfolgt durch Parallelverschiebung des Zielfunktionsniveaus nach links oben. Der zulässige Bereich wird verlassen auf dem Abschnitt der Geraden $2x_1 + 3x_2 = 21$ zwischen den Punkten $(3, 5)$ und $(6, 3)$.

Also wird das Maximum für die Punkte $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$ angenommen, der maximale Zielfunktionswert beträgt 42.

Transformation in Normalform und Lösung mit dem Simplexverfahren:

Variablensubstitution: $x'_1 = x_1 - 1 \geq 0, \quad x_1 = x'_1 + 1$
 $x'_2 = 5 - x_2 \geq 0, \quad x_2 = 5 - x'_2$

$2x_1 + 3x_2 = 2(x'_1 + 1) + 3(5 - x'_2) = 2x'_1 + 2 + 15 - 3x'_2 \leq 21, \quad 2x'_1 - 3x'_2 \leq 4$
 $3x_1 + 2x_2 = 3(x'_1 + 1) + 2(5 - x'_2) = 3x'_1 + 3 + 10 - 2x'_2 \leq 24, \quad 3x'_1 + 2x'_2 \leq 11$

NB in Gleichungsform mit Schlupfvariablen: $2x'_1 - 3x'_2 + u_1 = 4$
 $3x'_1 - 2x'_2 + u_2 = 11$

a) Zielfunktion: $z = 3x_1 + 4x_2 = 3(x'_1 + 1) + 4(5 - x'_2) = 3x'_1 - 4x'_2 + 23 \rightarrow \max,$
 $z' = 3x'_1 - 4x'_2 \rightarrow \max, \quad z = z' + 23$

BV	c_B	x'_1	x'_2	u_1	u_2	x_B	Q	
u_1	0	2	-3	1	0	4	2	1. Basislösung
u_2	0	3	-2	0	1	11	$\frac{11}{3}$	$x'_1 = x'_2 = 0, u_1 = 4, u_2 = 11 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 5$
$\Delta z'$		-3	4	0	0	0		$z' = 0$
x'_1	3	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	—	2. Basislösung
u_2	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	5	2	$x'_2 = u_1 = 0, x'_1 = 2, u_2 = 5 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 5$
$\Delta z'$		0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	6		$z' = 6$
x'_1	3	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	5		3. Basislösung
x'_2	-4	0	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	2		$u_1 = u_2 = 0, x'_1 = 5, x'_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 6, x_2 = 3$
$\Delta z'$		0	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	7		$z' = 7 \Rightarrow z = 30, \text{ alle } \Delta_j \geq 0 \Rightarrow \text{Optimum}$

Da die Optimalitätsindikatoren für die Nichtbasisvariablen positiv sind, ist $z(6,3) = 30$ das eindeutige Maximum.

b) Zielfunktion: $z = 3x_1 + 4x_2 = 3(x'_1 + 1) + 4(5 - x'_2) = 3x'_1 - 4x'_2 + 23 \rightarrow \min,$
 $z' = -3x'_1 + 4x'_2 \rightarrow \max, \quad z = -z' + 23$

BV	c_B	x'_1	x'_2	u_1	u_2	x_B	Q	
u_1	0	2	-3	1	0	4	—	1. Basislösung wie bei a)
u_2	0	3	-2	0	1	11	—	alle a_{i2} nichtpositiv \implies
$\Delta z'$		3	-4	0	0	0		ZF unbeschränkt, LOA unlösbar

c) Zielfunktion: $z = 4x_1 + 6x_2 = 4(x'_1 + 1) + 6(5 - x'_2) = 4x'_1 - 6x'_2 + 34 \rightarrow \max,$
 $z' = 4x'_1 - 6x'_2 \rightarrow \max, \quad z = z' + 34$

BV	c_B	x'_1 4	x'_2 -6	u_1 0	u_2 0	x_B	Q	
u_1	0	2	-3	1	0	4	$\frac{2}{3}$	1. Basislösung
u_2	0	3	-2	0	1	11	$\frac{11}{3}$	$x_1 = 1, x_2 = 5, u_1 = 4, u_2 = 11, z' = 0, z = 34$
$\Delta z'$		$\frac{-4}{3}$	6	0	0	0		
x'_1	4	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	—	2. Basislösung optimal, da alle $\Delta_j \geq 0$
u_2	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	5	$\frac{2}{3}$	$x_1 = 3, x_2 = 5, u_1 = 0, u_2 = 5, z' = 8, z = 42$
$\Delta z'$		0	$\frac{0}{2}$	2	0	8		Weiterrechn. mögl., da Δ_j für NBV x'_2 gleich 0
x'_1	4	1	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	5	$\frac{25}{3}$	3. Basislösung optimal
x'_2	-6	0	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	2	$\frac{5}{3}$	$x_1 = 6, x_2 = 5, u_1 = 0, u_2 = 0, z' = 8, z = 42$
$\Delta z'$		0	0	2	$\frac{0}{5}$	8		Weiterrechn. führt zurück auf 2. Basislösung

Alle Punkte auf der Kante zwischen den Ecken $(x_1, x_2) = (3, 5)$ und $(x_1, x_2) = (6, 3)$, d.h. alle Punkte $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 1$ sind optimale Lösungen, für sie ergibt sich der optimale Zielfunktionswert $z(x_1^*, x_2^*) = 4(3+3t) + 6(5-2t) = 42$.

4. In einer Kompostanlage werden 2 Sorten Pflanzsubstrat hergestellt. Für die Herstellung von 1 hl Substrat Sorte A werden u.a. 40 l Füllstoffe und 20 l Kompost, für 1 hl Substrat Sorte B werden u.a. 40 l Füllstoffe und 40 l Kompost benötigt. Pro Hektoliter Substrat werden bei der Sorte A 3 € und bei der Sorte B 5 € Erlös. Es stehen höchstens 800 hl Füllstoffe zur Verfügung, sollen aber mindestens 880 hl Kompost verwendet werden. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Erlös maximiert werden.

Stellen Sie das mathematische Modell auf und lösen Sie die Aufgabe auf grafischem Wege!

Lösung:

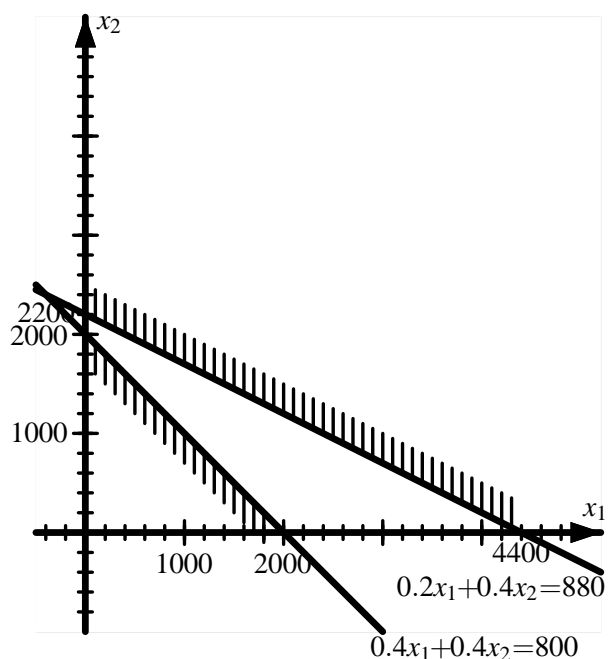
ges.: x_1 : herzustellendes Substrat A in hl,
 x_2 : herzustellendes Substrat B in hl

Gewinn: $3 x_1 + 5 x_2 \rightarrow \max$

Füllstoffe: $0.4 x_1 + 0.4 x_2 \leq 800$

Kompost: $0.2 x_1 + 0.4 x_2 \geq 880$

Nichtnegativität: $x_1, x_2 \geq 0$



Der zulässige Bereich ist leer, also ist die Aufgabe unlösbar.

5. Aus Trauben-, Orangen- und Apfelsaft werden 3 verschiedene Sorten Multivitaminsaft hergestellt. 5 l Multivitaminsaft enthalten bei der Sorte A 1 l Trauben-, 3 l Orangen- und 1 l Apfelsaft, bei der Sorte B 4 l Orangen- und 1 l Apfelsaft und bei der Sorte C 3 l Orangen- und 2 l Apfelsaft. Pro Liter wird ein Gewinn von 20 Cent bei Sorte A, 15 Cent bei Sorte B und 10 Cent bei Sorte C erzielt. Es stehen 500 l Trauben-, 1750 l Orangen- und 550 l Apfelsaft zur Verfügung.

Stellen sie das mathematische Modell für die Maximierung des Gewinns auf und lösen Sie dieses mit dem Simplexverfahren! Wieviel Liter der einzelnen Sorten sind herzustellen? Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Lösung:

ges.: x_1, x_2, x_3 : herzustellender Saft der Sorten A, B, C in l

$$\begin{aligned} \text{Gewinn:} & \quad z = 0.20x_1 + 0.15x_2 + 0.10x_3 \rightarrow \max & | \cdot 20 \\ \text{Traubensaft:} & \quad \frac{1}{5}x_1 & \leq 500 & | \cdot 5 \\ \text{Orangensaft:} & \quad \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{5}x_3 & \leq 1750 & | \cdot 5 \\ \text{Apfelsaft:} & \quad \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 & \leq 550 & | \cdot 5 \\ \text{Nichtnegativität:} & \quad x_1, \quad x_2, \quad x_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

Die angegebenen Multiplikationen für ZF und NB dienen der Rechenvereinfachung.

Normalform:	$\begin{aligned} z' = 20z = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \longrightarrow \max \\ x_1 & + u_1 = 2500 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 & + u_2 = 8750 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 & + u_3 = 2750 \\ x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3 & \geq 0 \end{aligned}$
-------------	---

BV	c_B	x_1	x_2	x_3	u_1	u_2	u_3	x_B	Q
u_1	0	1	0	0	1	0	0	2500	2500
u_2	0	3	4	3	0	1	0	8750	2916.67
u_3	0	1	1	2	0	0	1	2750	2750
$\Delta z'$		-4	-3	-2	0	0	0	0	
x_1	4	1	0	0	1	0	0	2500	—
u_2	0	0	4	3	-3	1	0	1250	312.5
u_3	0	0	1	2	-1	0	1	250	250
$\Delta z'$		0	-3	-2	4	0	0	10000	
x_1	0	1	0	0	1	0	0	2500	
u_2	0	0	0	-5	1	1	-4	250	
x_2	0	0	1	2	-1	0	1	250	
$\Delta z'$		0	0	4	1	0	3	10750	

Alle Optimalitätsindikatoren Δ_j sind nichtnegativ, dabei sind nur die für die Basisvariablen gleich 0. Also hat die Aufgabe bei $x_1 = 2500, x_2 = 250, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 250, x_6 = 0$ das eindeutige Maximum $z = z'/20 = 537.5$.

Der maximale Gewinn von 537,50 € wird erzielt, wenn 2500 l Saft Sorte A und 250 l Saft Sorte B hergestellt werden, während kein Saft Sorte C herzustellen ist.

Die Schlupfvariablen geben an, wie viele Rohstoffe beim optimalen Ergebnis nicht verbraucht werden. Aufgrund der Multiplikation der Ungleichungen für die Ressourcen mit 5 sind die Werte noch durch 5 zu dividieren. Also bleiben 50 l Orangensaft übrig, Trauben- und Apfelsaft werden vollständig verbraucht.

Zusatzaufgabe

Lösen Sie die folgende Aufgabe mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. a) Bestimmen Sie (ohne MATLAB) die reelle Lösung von

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(vgl. Übung 16, Aufgabe 3) für $\omega \neq \pm 1$ in Abhängigkeit von ω .

- b) Zeichnen Sie die x -Komponente der Lösung für $\omega = 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}$ über dem Intervall $[0, 10\pi]$. In Übung 16, Aufgabe 3 wurde für $\omega = 1$ als Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

angegeben. Ermitteln Sie auch hierzu die Lösung der Anfangswertaufgabe und zeichnen Sie deren x -Komponente ein.

- c) Wie lautet die Periodenlänge der unter (a) bestimmten Lösung für rationale ω (in Abhängigkeit von ω)?

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Lösung:

1. a) Die allgemeine Lösung des homogenen Systems wurde bereits in Übung 16 besprochen. Sie lautet

$$\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Für die Inhomogenität kann der Ansatz nach Art der rechten Seite gemacht werden

$$\vec{x}_s(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \sin \omega t + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \cos \omega t$$

(mit noch zu bestimmenden A_1, A_2, B_1, B_2). Setzt man diesen Ansatz in das inhomogene System ein, erhält man

$$\begin{aligned} \omega \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cos \omega t - \omega \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \sin \omega t = \vec{x}'_s(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_s(t) + \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \omega A_1 \cos \omega t - \omega B_1 \sin \omega t \\ \omega A_2 \cos \omega t - \omega B_2 \sin \omega t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der Koeffizienten folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} A_2 &= -\omega B_1 + 1 \\ B_2 &= \omega A_1 \\ -A_1 &= -\omega B_2 \\ B_2 &= \omega A_2 \end{aligned}$$

dessen Lösung

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{1}{1 - \omega^2}, \quad B_1 = \frac{-\omega}{1 - \omega^2}, \quad B_2 = 0$$

lautet. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist damit

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{1 - \omega^2} \begin{pmatrix} -\omega \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Um die gegebene Anfangsbedingung zu erfüllen, muss

$$\vec{x}(0) = \frac{1}{1 - \omega^2} \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gelten, d.h.

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \omega^2} \begin{pmatrix} \omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) nachbereitete diary-Datei (Kommentare durch % gekennzeichnet) und Plot auf der nächsten Seite
- c) Es muss die Periodenlänge der homogenen Lösung ($= 2\pi$) mit der Periodenlänge der speziellen Lösung ($= \frac{2\pi}{\omega}$) abgestimmt werden, um die Periodenlänge der Lösung zu erhalten. Es muss also

$$k_1 2\pi = k_2 \frac{2\pi}{\omega}$$

für ganze Zahlen k_1 und k_2 gelten. Die rationale Periodenlänge ω lässt sich als $\omega = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und $\text{ggT}(p, q) = 1$ schreiben. Dann ist die obige Bedingung zu

$$k_1 = k_2 \frac{1}{\omega} = k_2 \frac{q}{p}$$

äquivalent. Aus $\text{ggT}(p, q) = 1$ folgt $k_2 = p$ und $k_1 = q$ und damit beträgt die Periodenlänge der Lösung

$$q \cdot 2\pi \quad \text{bzw.} \quad p \cdot \frac{2\pi}{\omega}.$$

```

% -----
% Aufgabe 1
% -----

omega=[2, 3/2, 6/5];

linestyles=('b-', 'm-', 'c-');

% Startbedingung
x0 = [0 ; 0];

% Figure einrichten
figure(1); clf; hold on;
t = linspace(0,5*2*pi,1000);

for i=1:length(omega),

    % Frequenz der Anregung
    w = omega(i);

    % Parameter C(1), C(2) bestimmen, damit die Anfangsbed. erfüllt ist
    C = x0 - 1/(1-w^2) * [-w ; 0];

    % Lösung für w berechnen
    x = 1/(1-w^2) * [-w * cos(w*t) ; sin(w*t)] + C(1) * [cos(t) ; -sin(t)]
        + C(2) * [sin(t) ; cos(t)];

    % x-Komponente der Lösung plotten
    plot(t,x(1,:),linestyles{i}, 'LineWidth',2);
end

% Parameter C(1), C(2) bestimmen, damit die Anfangsbedingung erfüllt ist
C = x0;
% Lösung berechnen
x = C(1) * [cos(t) ; -sin(t)] + C(2) * [sin(t) ; cos(t)]
    + 1/2 * [t .* sin(t) ; t.*cos(t) - sin(t)];
% x-Komponente der Lösung plotten
plot(t,x(1,:), 'r-', 'LineWidth',3);

% Titel und Label setzen
legend('omega = 2', 'omega = 3/2', 'omega = 6/5', 'omega = 1', 'Location', 'NorthWest');
xlabel('t'); ylabel('x');
set(gca, 'XTick', 0:2*pi:6*2*pi);
title('x-Komponente der Lösungen des Differenzialgleichungssystems');
print -depsc HA05_matlab_plot_1.eps

diary off

```

