Technische Universität Chemnitz 23. Juni 2009
Fakultät für Mathematik

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 5: Inhomogene Differenzialgleichungssysteme; Lineare Optimierung

Letzter Abgabetermin: 09. Juli 2009
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 5“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe $\dot{\vec{x}}(t) = \boldsymbol{A}\vec{x}(t) + \vec{F}\sin t,\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0$ für $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{F} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},\ \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$!

2. Wenden Sie die Methode des Ansatzes vom Typ der rechten Seite auf die Differenzialgleichungssysteme a) $\begin{array}{l} \dot{x} = 2x + 2y - 4 \\ \dot{y} = 3x + y - 10 \end{array}$ und b) $\begin{array}{l} \dot{x} = 2x + 2y - 4 \\ \dot{y} = x + y - 10 \end{array}$ an! Was stellen Sie fest?

3. Bestimmen Sie unter den Nebenbedingungen $2x_1 + 3x_2 \leq 21$, $3x_1 + 2x_2 \leq 24$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \leq 5$ die Optima der Zielfunktionen
   a) $z = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \max$,
   b) $z = 3x_1 + 4x_2 \longrightarrow \min$,
   c) $z = 4x_1 + 6x_2 \longrightarrow \max$

   jeweils auf grafischem Wege und mit dem Simplexverfahren! Zeichnen Sie die beim Simplexverfahren durchlaufenen Basislösungen jeweils in die Skizze der grafischen Lösung ein! Für welche Argumente x_1, x_2 werden die Optima erreicht?

4. In einer Kompostanlage werden 2 Sorten Pflanzsubstrat hergestellt. Für die Herstellung von 1 hl Substrat Sorte A werden u.a. 40 l Füllstoffe und 20 l Kompost, für 1 hl Substrat Sorte B werden u.a. 40 l Füllstoffe und 40 l Kompost benötigt. Pro Hektoliter Substrat werden bei der Sorte A 3 € und bei der Sorte B 5 € erlöst. Es stehen höchstens 800 hl Füllstoffe zur Verfügung, sollen aber mindestens 880 hl Kompost verwendet werden. Unter den vorgegebenen Bedingungen soll der Erlös maximiert werden.

   Stellen Sie das mathematische Modell auf und lösen Sie die Aufgabe auf grafischem Wege!

5. Aus Trauben-, Orangen- und Apfelsaft werden 3 verschiedene Sorten Multivitaminsaft hergestellt. 5 ℓ Multivitaminsaft enthalten bei der Sorte A 1 ℓ Trauben-, 3 ℓ Orangen- und 1 ℓ Apfelsaft, bei der Sorte B 4 ℓ Orangen- und 1 ℓ Apfelsaft und bei der Sorte C 3 ℓ Orangen- und 2 ℓ Apfelsaft. Pro Liter wird ein Gewinn von 20 Cent bei Sorte A, 15 Cent bei Sorte B und 10 Cent bei Sorte C erzielt. Es stehen 500 ℓ Trauben-, 1750 ℓ Orangen- und 550 ℓ Apfelsaft zur Verfügung.

   Stellen sie das mathematische Modell für die Maximierung des Gewinns auf und lösen Sie dieses mit dem Simplexverfahren! Wieviel Liter der einzelnen Sorten sind herzustellen? Welche Bedeutung haben die Werte der Schlupfvariablen in der optimalen Lösung?

Zusatzaufgabe auf Seite 2

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgende Aufgabe mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. a) Bestimmen Sie (ohne `MATLAB`) die reelle Lösung von

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (vgl Übung 16, Aufgabe 3) für $\omega \neq \pm 1$ in Abhängigkeit von ω.

   b) Zeichnen Sie die x-Komponente der Lösung für $\omega = 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}$ über dem Intervall $[0, 10\pi]$. In Übung 16, Aufgabe 3 wurde für $\omega = 1$ als Lösung des Differenzialgleichungssystems

$$\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t \sin t \\ t \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

   angegeben. Ermitteln Sie auch hierzu die Lösung der Anfangswertaufgabe und zeichnen Sie deren x-Komponente ein.

   c) Wie lautet die Periodenlänge der unter (a) bestimmten Lösung für rationale ω (in Abhängigkeit von ω)?

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.