

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 4: Analytische Geometrie

Letzter Abgabetermin: 09. Juni 2009

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

- Gegeben sei das Dreieck mit den Eckpunkten $A(1, 0, 1)$, $B(3, 1, 4)$ und $C(2, -1, 1)$.
 - Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks!
 - Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks!
- Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 40 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ (Längeneinheit jeweils cm) aufgespannten Parallelepipeds in Litern!
- Gegeben seien die Punkte $A = (6, -1, 1)$, $B = (7, 3, 3)$, $C = (4, 6, 2)$ und $D = (2, 1, -1)$.
 - Zeigen Sie durch Berechnung des Volumens des von den Vektoren \vec{AB} , \vec{AC} und \vec{AD} aufgespannten Parallelepipeds, dass die Punkte in einer Ebene liegen!
 - Ermitteln Sie die Gleichung dieser Ebene in Parameterform und in parameterfreier Form!
 - Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$!
 - Bestimmen Sie die Innenwinkel in diesem Viereck!
- Es seien die Ebene E durch die Gleichung $x - 2y - z = 1$ sowie die Gerade g durch die Gleichung $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, gegeben.
 - Bestimmen Sie die Gleichung des Lotes von $P(4, -3, -3)$ auf die Ebene E und den Lotfußpunkt!
 - Bestimmen Sie den Schnittwinkel der Ebene E mit der Geraden g !
 - Geben Sie die Geradengleichung der Projektion von g auf E an!
- Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebenen $-x + 2y + 2z = 4$ und $2x + y - 4z = -3$!
- Gegeben seien die Punkte
 - $A(1, 1, 3)$, $B(7, 3, -1)$, $C(-11, -3, 11)$, $D(10, 4, -3)$ bzw.
 - $A(-2, -1, -5)$, $B(1, 11, -5)$, $C(-1, 6, 7)$, $D(-3, 8, 8)$.Wie verhalten sich jeweils die Gerade durch die Punkte A und B und die Gerade durch die Punkte C und D zueinander? Sind sie parallel, identisch, windschief oder schneiden sie sich? Geben Sie bei windschiefen oder parallelen Geraden die Entfernung an, bei sich schneidenden Geraden den Schnittpunkt!

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 6 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie die Kanten des von den drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ aufgespannten Parallelepipedes. Versuchen Sie, die Ansicht so zu wählen, dass die Orthogonalität von \vec{a} zu $\vec{a} \times \vec{b}$ und von \vec{b} zu $\vec{a} \times \vec{b}$ zu erkennen ist.
2.
 - a) Stellen Sie die Ebene und die Gerade aus der obigen Aufgabe 4 in einem Plot geeignet dar.
 - b) Berechnen Sie den Lotfußpunkt aus Aufgabe 4 a) mit Hilfe von MATLAB. Zeichnen Sie ihn sowie die Strecke vom Punkt zum Lotfußpunkt in den Plot ein.
 - c) Fügen Sie dem Plot die projizierte Gerade aus Aufgabe 4 c) hinzu.
 - d) Kennzeichnen Sie die verschiedenen Geraden durch verschiedene Farben oder Linienstile und legen Sie eine Legende an. (Durch Anwahl des Cursorsymbols im Plotfenster und Rechtsklicken auf eine Gerade können Farbe, Liniendicke, Linienstil und Marker auch nach dem Plotten noch verändert werden.)

Öffnen Sie die erstellte diary-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete diary-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur MATLABaufgabe

Skalar- und Kreuzprodukt

In MATLAB lässt sich das Kreuzprodukt zweier Vektoren mit dem Befehl `cross` und das Skalarprodukt mit dem Befehl `dot` bestimmen. Beispiel:

```
>> cross([1; -1; 2], [-4; 2; 0])
>> dot([1; -1; 2], [-4; 2; 0])
```

Darstellen von Geraden und Vektoren

Um einen Vektor darzustellen, kann man beispielsweise die Verbindungslinie vom Koordinatenursprung a nach b mit dem Befehl `plot` bzw. `plot3` zeichnen. Der Befehl

```
>> plot3([a(1), b(1)], [a(2), b(2)], [a(3), b(3)])
```

bildet den Vektor v ab.

Wiederholung: Darstellen von Punkten und Ebenen

Ein einzelner Punkt im Raum kann durch einen einfachen `plot3`-Befehl dargestellt werden. Beispielsweise wird durch

```
>> plot3(1,1,1)
```

der Punkt mit den Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gezeichnet. Die Darstellung lässt sich durch

```
>> plot3(1,1,1,'Marker','.', 'MarkerSize',20, 'Color','red')
>> grid on
```

verdeutlichen.

Um eine Ebene im 3-dimensionalen Raum darzustellen, kann man beispielsweise drei Punkte der Ebene auswählen und das von ihnen erzeugte Dreieck zeichnen. Der Befehl

```
>> patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2],[0 1 0]);
```

stellt die durch $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$ gegebene Ebene dar, wobei $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ aus-

gewählte Punkte der Ebene sind. Durch Rotation (Tools \rightarrow Rotate 3D) können Sie sich die 3-dimensionale Darstellung verdeutlichen. Mit

```
>> patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2],[0 0 1], 'FaceAlpha',0.5);
```

kann man die Darstellung verbessern. Mit dem vierten Parameter (hier: `[0 0 1]`) werden die Rot-Grün-Blau-Anteile der Farbe eingestellt und mit dem letzten Parameter (hier: `0.5`) kann man die Transparenz des Objektes steuern.