

Höhere Mathematik I.2

**Aufgabenkomplex 4: Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme**

**Letzter Abgabetermin: 16. Juni 2009**

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung  $y'(x) = \frac{1}{x}$  und stellen Sie in diesem die Lösungsmenge dieser Differenzialgleichung dar!
2. An einer bestimmten Stelle wurde nach der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl eine Flächenbelastung durch ein radioaktives Isotop von  $200 \text{ kBq/m}^2$  gemessen. Ein Jahr später wurde an der gleichen Stelle eine Belastung von noch  $195.43 \text{ kBq/m}^2$  gemessen. Bekannt ist, dass die Änderungsgeschwindigkeit der Radioaktivität proportional zu ihrer Höhe ist. Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Belastung auf  $150 \text{ kBq/m}^2$  gefallen sein wird!
3. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung  $y' - \frac{\cos x}{2 + \sin x} y = 2 + \sin x$  !
4. Drehen Sie das kartesische  $x$ - $y$ -Koordinatensystem so, dass die Gleichung der Kurve  $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 26\sqrt{13}x + 13\sqrt{13}y = (x \ y) \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (26\sqrt{13} \ 13\sqrt{13}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  in Hauptachsenlage überführt wird! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve im  $x$ - $y$ -System grafisch dar!
5. a) Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems  $\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 4y \\ \dot{y} &= -2x + 3y \end{aligned}$  !  
b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, für die  $x(0) = 3$  und  $y(0) = 5$  gilt!
6. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe  $\begin{aligned} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= 3x - 5y \\ \dot{z} &= 2x - 4y + z \\ x(0) &= 3, y(0) = -2, z(0) = -1 \end{aligned}$  !

**Zusatzaufgabe**

**Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 6 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung aus obiger Aufgabe 1 zusammen mit einigen ausgewählten Lösungen der Gleichungen in einen gemeinsamen Plot und beschriften Sie die Achsen. Beachten Sie, dass sich die Pfeile nur im Anstieg, nicht aber in ihrer Länge unterscheiden sollen.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der in den obigen Aufgaben 5 und 6 auftretenden Systemmatrizen und vergleichen Sie diese mit Ihren Ergebnissen.
3. Zeichnen Sie die Punkte  $(x, y)$ , welche die Gleichung in obiger Aufgabe 4 erfüllen, unter Verwendung des `contour`-Befehls und beschriften Sie die Achsen.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

## Hinweise zur MATLABaufgabe

### eig

Die Funktion `eig` dient der Bestimmung von Eigenwerten und der dazugehörigen Eigenvektoren. Zum Beispiel gibt der Befehl

```
>> eig( [1 2 ; 2 1] )
```

die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zurück. Ist man zusätzlich an den Eigenvektoren interessiert, so werden zwei Rückgabeargumente benötigt

```
>> [V,D] = eig( [1 2 ; 2 1] )
```

### contour

Mit `contour` können die Niveaumengen (Punkte mit gleichem Funktionswert, z.B. Höhenlinien auf einer Landkarte) einer Funktion dargestellt werden. Mit den Befehlen

```
>> x = linspace(-2, 2, 100);
```

```
>> y = linspace(-2, 2, 100);
```

```
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
```

```
>> Z = X.^2 + Y.^2;
```

```
>> contour(X,Y,Z)
```

werden einige Niveaumengen, also  $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$ , der Funktion  $f(x,y) = x^2 + y^2$  gezeichnet. Es ist möglich, die gewünschten Niveaus  $c$  selbst anzugeben, z.B. werden mit

```
>> contour(X,Y,Z,[1 2])
```

nur die beiden Kreise zum Niveau  $c = 1$  und  $c = 2$  gezeichnet. Will man nur ein Niveau zeichnen, muss dieses doppelt angegeben werden, z.B.

```
>> contour(X,Y,Z,[1 1])
```

### quiver

`quiver` dient dem Zeichnen von Pfeilen. Zum Beispiel zeichnet

```
>> quiver( [0 0 0], [-1 0 1], [2 -1 3] , [0 0 -2] )
```

die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

an die zugehörigen Stellen

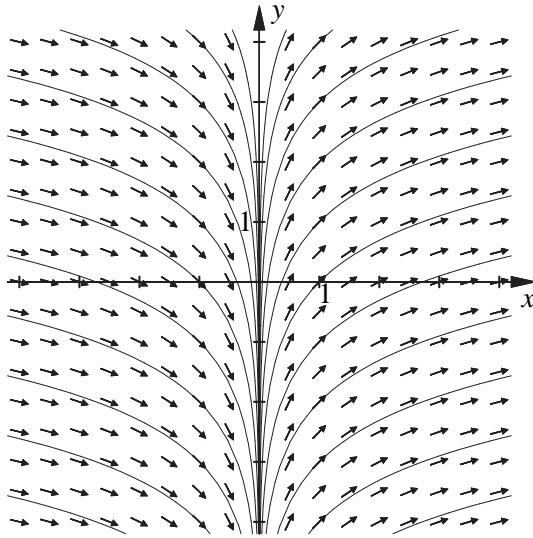
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

siehe auch

```
>> help quiver
```

**Aufgabenkomplex 4: Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme****Letzter Abgabetermin: 16. Juni 2009**

1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung  $y'(x) = \frac{1}{x}$  und stellen Sie in diesem die Lösungsmenge dieser Differentialgleichung dar!

**Lösung:**

Lösungen der Differentialgleichung:  $y(x) = \ln|x| + C$   
(eingezeichnet für  $C = -5, -4, \dots, 5$ )

2. An einer bestimmten Stelle wurde nach der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl eine Flächenbelastung durch ein radioaktives Isotop von  $200 \text{ kBq/m}^2$  gemessen. Ein Jahr später wurde an der gleichen Stelle eine Belastung von noch  $195.43 \text{ kBq/m}^2$  gemessen. Bekannt ist, dass die Änderungsgeschwindigkeit der Radioaktivität proportional zu ihrer Höhe ist. Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Belastung auf  $150 \text{ kBq/m}^2$  gefallen sein wird!

**Lösung:**

$N(t)$  Flächenbelastung in Abhängigkeit von der Zeit

$$\frac{dN}{dt} \sim N, \quad \frac{dN}{dt} = kN, \quad N(0) = 200, \\ N(1) = 195.43$$

$$\frac{dN}{N} = k dt \quad (N > 0), \quad \int \frac{dN}{N} = \int k dt \quad (N > 0), \quad \ln N = kt + C$$

$$t = 0: \ln 200 = C,$$

$$t = 1: \ln 195.43 = k + C, \quad k = \ln 195.43 - \ln 200 = \ln \frac{195.43}{200} \approx -0.0231$$

$$\ln N = \ln \frac{195.43}{200} t + \ln 200, \quad \text{für } N = 150 \text{ ergibt sich } t = \frac{\ln \frac{150}{200}}{\ln \frac{195.43}{200}} \approx 12.45.$$

Nach 12.45 Jahren ist die Flächenbelastung auf  $150 \text{ kBq/m}^2$  gefallen.

$$(N = 100 \text{ ergibt sich nach } \frac{\ln \frac{100}{200}}{\ln \frac{195.43}{200}} \approx 29.99 \text{ Jahren, Cäsium-137: Halbwertszeit: 30 Jahre.)$$

(Nach Tschernobyl traten Flächenbelastungen  $> 200 \text{ kBq/m}^2$  in Teilen der Ukraine, Weissrusslands, Russlands und Skandinaviens auf. In Mitteleuropa war z.B. Österreich stark betroffen mit Spitzenwerten von  $150 \text{ kBq/m}^2$ . Bei München wurden  $19 \text{ kBq/m}^2$  gemessen.)

3. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung  $y' - \frac{\cos x}{2+\sin x} y = 2+\sin x$  !

**Lösung:**

**homogen:** Trennung der Veränderlichen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2+\sin x} y, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x dx}{2+\sin x}, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x dx}{2+\sin x} = \int \frac{d \sin x}{2+\sin x}$$

(Dabei ist die Substitution  $t = 2+\sin x$ ,  $\frac{dt}{dx} = \cos x$ ,  $dt = \cos x dx$  vorgenommen werden.)

$$\ln y = \ln(2+\sin x) + \ln C, \quad y = C(2+\sin x)$$

(Der bei der Division durch  $y$  zu beachtende Sonderfall  $y=0$  ist bei der Wahl von  $C=0$  in dieser Lösung enthalten, streng genommen müsste außerdem

$\ln |y| = \ln(2+\sin x) + \ln C$ ,  $C > 0$ ,  $|y| = C(2+\sin x)$ ,  $C > 0$ ,  $y = C(2+\sin x)$ ,  $C$  beliebig reell (einschließlich  $C=0$ , da  $y \equiv 0$  Lösung ist) geschrieben werden.)

**inhomogen:** Variation der Konstanten: Ansatz:  $y = C(x)(2+\sin x)$

$$C'(x)(2+\sin x) + C(x) \cos x - \frac{\cos x}{2+\sin x} C(x)(2+\sin x) = 2+\sin x, \quad C'(x)(2+\sin x) = 2+\sin x, \\ C'(x) = 1, \quad C(x) = x + D$$

allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.:  $y = x(2+\sin x) + D(2+\sin x)$

4. Drehen Sie das kartesische  $x$ - $y$ -Koordinatensystem so, dass die Gleichung der Kurve

$$9x^2 + 12xy + 4y^2 + 26\sqrt{13}x + 13\sqrt{13}y = (x \ y) \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (26\sqrt{13} \ 13\sqrt{13}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

in Hauptachsenlage überführt wird! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve im  $x$ - $y$ -System grafisch dar!

**Lösung:**

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 6 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(4-\lambda) - 36 = 36 - 13\lambda + \lambda^2 - 36 = (\lambda-13)\lambda, \quad \lambda_{1/2} = 13; 0$$

$$\text{EV zu } \lambda_1 = 13: \quad \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \quad \text{EV} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ normiert } \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{EV zu } \lambda_2 = 0: \quad \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{EV} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ normiert } \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Drehung: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad (\text{Dabei gilt } \det \mathbf{V} = 1.)$$

$$\frac{1}{13} (\xi \ \eta) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} (26 \ 13) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

$$(\xi \ \eta) \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + (104 \ -13) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0$$

(Da zur Drehung die orthogonale Matrix aus den normierten Eigenwerten verwendet wurde, ist beim quadratischen Anteil ohnehin klar, dass die Diagonalmatrix aus den normierten Eigenwerten

entsteht. Für die Koeffizienten des linearen Anteils ist aber die Berechnung mit der Drehmatrix erforderlich.)

$$13\xi^2 + 104\xi - 13\eta = 0, \quad \xi^2 + 8\xi - \eta = 0,$$

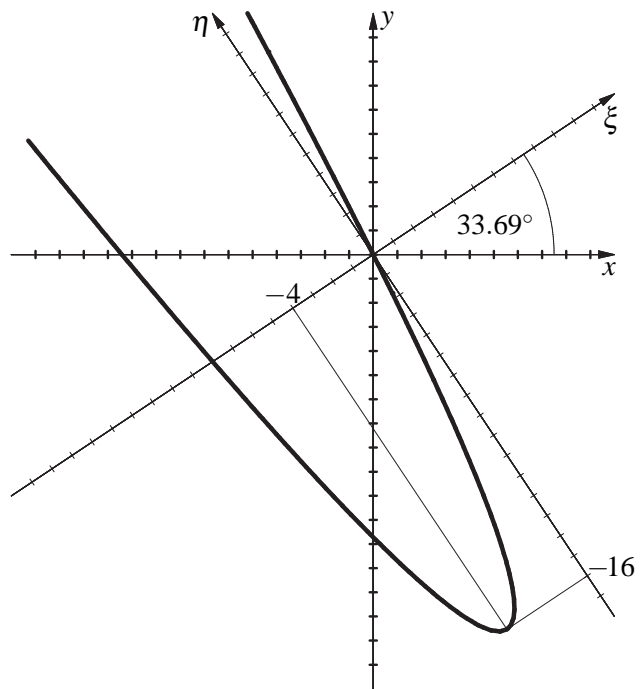
$$\underline{\underline{\eta = \xi^2 + 8\xi = (\xi + 4)^2 - 16}}$$

Also handelt sich um eine Parabel. Im transformierten Koordinatensystem liegt ihr Scheitelpunkt im Punkt  $(-4, -16)$ .

$$V = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ gilt}$$

für  $\alpha = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}} \approx 33.69^\circ$  (da I. Quadrant).

Folglich entsteht das  $\xi$ - $\eta$ -System aus dem  $x$ - $y$ -System durch Drehung um ca.  $33.69^\circ$ .



5. a) Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems  $\dot{x} = -x + 4y$   
 $\dot{y} = -2x + 3y$  !

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, für die  $x(0) = 3$  und  $y(0) = 5$  gilt!

**Lösung:**

a)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -3-2\lambda+\lambda^2+8 = \lambda^2-2\lambda+5=0, \quad \lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$$

EV zu  $1+2i$ :  $\begin{array}{cc|l} -2-2i & 4 & \\ -2 & 2-2i & | : (-2), \text{ Zeilen tauschen} \\ \hline 1 & -1+i & \end{array}$

$$\begin{array}{cc|l} -2-2i & 4 & | \text{II} + (2+2i)\text{I} \\ \hline 1 & -1+i & \end{array}$$

$$x_1 - (1-i)x_2 = 0 \quad \text{EV } C \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu  $1-2i$ :  $\begin{array}{cc|l} -2+2i & 4 & \\ -2 & 2+2i & | : (-2), \text{ Zeilen tauschen} \\ \hline 1 & -1-i & \end{array}$

$$\begin{array}{cc|l} -2+2i & 4 & | \text{II} + (2-2i)\text{I} \\ \hline 1 & -1-i & \end{array}$$

$$x_1 - (1+i)x_2 = 0 \quad \text{EV } D \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

allgemeine komplexe Lösung:  $\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-2i)t} + D \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t}$

**3 Wege zur Berechnung der allgemeinen reellen Lösung:**

**I. Ausführliche Rechnung:**

Setzen  $C = A + Bi$ ,  $D = \bar{C} = A - Bi$

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= e^t \left( (A+Bi) \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) + (A-Bi) \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 2t - i \sin 2t) \right) \\ &= e^t \left( \begin{pmatrix} (A+B) - (A-B)i \\ A+Bi \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) + \begin{pmatrix} (A+B) + (A-B)i \\ A-Bi \end{pmatrix} (\cos 2t - i \sin 2t) \right) \\ &= e^t \left( \begin{pmatrix} (A+B) \cos 2t + (A-B) \sin 2t + i((A+B) \sin 2t - (A-B) \cos 2t) \\ A \cos 2t - B \sin 2t + i(A \sin 2t + B \cos 2t) \end{pmatrix} + \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} (A+B) \cos 2t + (A-B) \sin 2t + i(-(A+B) \sin 2t + (A-B) \cos 2t) \\ A \cos 2t - B \sin 2t + i(-A \sin 2t - B \cos 2t) \end{pmatrix} \right) \\ &= e^t \begin{pmatrix} (2A+2B) \cos 2t + (2A-2B) \sin 2t \\ 2A \cos 2t - 2B \sin 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A \begin{pmatrix} \sin 2t + \cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} - 2B \begin{pmatrix} \sin 2t - \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{pmatrix} e^t \end{aligned}$$

Mit  $E = 2A$ ,  $F = -2B$  erhält man  $\vec{x}(t) = \underline{\underline{E \begin{pmatrix} \sin 2t + \cos 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^t + F \begin{pmatrix} \sin 2t - \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} e^t}}$

als allgemeine reelle Lösung des Differenzialgleichungssystems.

**II. Vereinfachte Rechnung (s. Vorlesung):**

Die Zerlegung der zum ersten Eigenwert gehörenden Lösung in Real- und Imaginärteil ergibt  $e^t \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t + \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} + i e^t \begin{pmatrix} \sin 2t - \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$ . Multipliziert man Real- und Imaginärteil separat mit Konstanten, erhält man das unter I. vorgerechnete Ergebnis.

**III. Berechnung einer aus der anderen Komponente:**

Wegen  $\lambda_{1/2} = 1 \pm 2i$  kann man jede der beiden Komponenten in der Form  $e^t (E \cos 2t + F \sin 2t)$  ansetzen und daraus mithilfe der gegebenen Differenzialgleichungen die andere Komponente errechnen. Setzt man z.B.  $y(t) = e^t (E \cos 2t + F \sin 2t)$ , so folgt aus der zweiten Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}(3y(t) - \dot{y}(t)) = \frac{1}{2} e^t (3E \cos 2t + 3F \sin 2t - E \cos 2t - F \sin 2t + 2E \sin 2t - 2F \cos 2t) \\ &= \frac{1}{2} e^t (2E \cos 2t + 2E \sin 2t + 2F \sin 2t - 2F \cos 2t) = e^t (E(\sin 2t + \cos 2t) + F(\sin 2t - \cos 2t)), \end{aligned}$$

so dass man auch auf diesem Wege das unter I. notierte Ergebnis erhält.

Geht man stattdessen von  $x(t) = e^t (E \cos 2t + F \sin 2t)$  aus, so ergibt sich die zweite Komponente zu  $y(t) = \frac{\dot{x}(t) + x(t)}{4} = e^t \left( E \frac{\cos 2t - \sin 2t}{2} + F \frac{\cos 2t + \sin 2t}{2} \right)$ .

b) Setzt man  $t = 0$  in die bei a) unter Weg I notierte Lösung ein, so erhält man

$$\vec{x}(0) = E \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad E - F = 3, \quad E = 5, \quad \text{also } F = 2.$$

Lösung der AWA also:  $\underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 7 \sin 2t + 3 \cos 2t \\ 2 \sin 2t + 5 \cos 2t \end{pmatrix} e^t}}$ , d.h.  $\begin{matrix} x(t) = (7 \sin 2t + 3 \cos 2t) e^t \\ y(t) = (2 \sin 2t + 5 \cos 2t) e^t \end{matrix}$

6. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe  $\dot{x} = 2y$   
 $\dot{y} = 3x - 5y$   
 $\dot{z} = 2x - 4y + z$   
 $x(0) = 3, y(0) = -2, z(0) = -1$  !

**Lösung:**

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 + 5\lambda - 6) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2/3} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} = \begin{cases} 1 \\ -6 \end{cases}$$

EV zu  $\lambda_{1/2} = 1$ :

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & -2 & 0 & \\ 3 & -6 & 0 & \\ 2 & -4 & 0 & \\ \hline 1 & -2 & 0 & x_1 - 2x_2 = 0, x_1 = 2x_2, \\ 0 & 0 & 0 & x_2 = C, x_3 = D \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \text{EV: } C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EV zu  $\lambda_3 = -6$ :

$$\begin{array}{ccc|l} 6 & 2 & 0 & \\ 3 & 1 & 0 & \\ 2 & -4 & 7 & \\ \hline 3 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 14 & 0 & 7 & \\ \hline 3 & 1 & 0 & 3x_1 + x_2 = 0, x_2 = -3x_1 \\ 2 & 0 & 1 & 2x_1 + x_3 = 0, x_3 = -2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \text{EV: } E \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + E \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-6t}, \quad \vec{x}(0) = C \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\underline{\underline{\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-6t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-6t}, \text{ d.h. } \begin{cases} x(t) = 2e^t + e^{-6t} \\ y(t) = e^t - 3e^{-6t} \\ z(t) = e^t - 2e^{-6t} \end{cases}}$$

**Zusatzaufgabe**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung aus obiger Aufgabe 1 zusammen mit einigen ausgewählten Lösungen der Gleichungen in einen gemeinsamen Plot und beschriften Sie die Achsen. Beachten Sie, dass sich die Pfeile nur im Anstieg, nicht aber in ihrer Länge unterscheiden sollen.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der in den obigen Aufgaben 5 und 6 auftretenden Systemmatrizen und vergleichen Sie diese mit Ihren Ergebnissen.
3. Zeichnen Sie die Punkte  $(x, y)$ , welche die Gleichung in obiger Aufgabe 4 erfüllen, unter Verwendung des `contour`-Befehls und beschriften Sie die Achsen.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

**Lösung:**

nachbereitete `diary`-Datei (Kommentare durch `%` gekennzeichnet) und Plots auf dieser und der nächsten Seite

```

% -----
% Aufgabe 1
% -----
% Anzahl der Pfeile pro Koordinatenrichtung
n = 18;
x = linspace(-2, 2, n);
y = linspace(-2, 2, n);
[X, Y] = meshgrid(x, y);
% Verschiebe X um eps, damit X nie exakt 0 ist
X = X + eps;
% Berechnung der Norm der Pfeile, um diese später zu Normieren
Norm = sqrt(1 + 1./X.^2);
% x Koordinate der Pfeile setzen
U = ones(n,n) ./ Norm;
% y Koordinate der Pfeile setzen
V = (1./X) ./ Norm;
% Pfeile zeichnen
figure(1); clf;
quiver(X, Y, U, V, 0.5, 'LineWidth', 2, 'Color', 'black');
% für Octave ('LineWidth',2,'Color','black' führen bei Octave zu Fehler):
% quiver(X, Y, U, V, 0.5)
% axis fest einstellen
axis([-2 2 -2 2]);
grid on;
hold on;
% Koordinatenachsen hervorheben
plot([-2,2],[0,0],'-k','LineWidth',1)
plot([0,0],[-2,2],'-k','LineWidth',1)
% Jetzt drei Lösungen einzeichnen
n = 50;
x = linspace(-2, 2, n);
f1 = log(abs(x));
f2 = log(abs(x)) + 1;
f3 = log(abs(x)) - 1;
plot(x, f1, 'Color', 'blue', 'LineWidth', 2);
plot(x, f2, 'Color', 'red', 'LineWidth', 2);
plot(x, f3, 'Color', 'magenta', 'LineWidth', 2);
% Labels, Title
xlabel('x'); ylabel('y');
title('Richtungsfeld und ausgewählte Lösungen');
print -depsc HA04_matlab_plot_1.eps

```

```

% -----
% Aufgabe 2
% -----

A = [ -1 4 ; -2 3 ];
EW=eig(A) '
EW =
    1.0000 - 2.0000i    1.0000 + 2.0000i

[EV,D]=eig(A); EV
EV =
    0.8165          0.8165
    0.4082 + 0.4082i    0.4082 - 0.4082i

B = [ 0 2 0 ; 3 -5 0 ; 2 -4 1 ];
EW=eig(B) '
EW =
     1     -6     1

[EV,D]=eig(B); EV
EV =
     0    0.2673   -0.8016
     0   -0.8018   -0.4008
    1.0000   -0.5345   -0.4436

% Ermittelt wurden normierte Eigenvektoren. Der 1. und der 3. EV gehören
% zum EW 1. Der 3. EV ergibt sich aus der oben in der Musterlösung von
% Aufgabe 6 notierten Darstellung durch Wahl von C=-0.4008 und D=-0.4436.

% -----
% Aufgabe 3
% -----

n = 100;
x = linspace(-20, 20, n);
y = linspace(-20, 20, n);
[X,Y] = meshgrid(x,y);

Z = 9*X.^2 + 12*X.*Y + 4*Y.^2 + 26*sqrt(13)*X + 13*sqrt(13)*Y;

figure(2); clf; hold on;
contour(X,Y,Z,[0 0], 'LineWidth',3, 'Color','black');

%
% für Octave (kann mit contour nur geschlossene Konturen darstellen):
% Z(1,:)=0; Z(100,:)=0; Z(:,1)=0; Z(:,100)=0;
% Zusatzparameter werden bei Octave beim contour-Befehl nicht akzeptiert:
% contour(X,Y,Z,[0,0])
%

% Label, Title
xlabel('x'); ylabel('y'); grid on; hold on;
plot([-20,20],[0,0], '-k', 'LineWidth',1)
plot([0,0],[-20,20], '-k', 'LineWidth',1)
title('gedrehte Parabel (vgl. Aufgabe 4)');
print -depsc HA04_matlab_plot_3.eps
diary off

```

