

Höhere Mathematik I.2

**Aufgabenkomplex 4: Differenzialgleichungen, Eigenwertprobleme**

**Letzter Abgabetermin: 16. Juni 2009**

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 4“  
kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

1. Skizzieren Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung  $y'(x) = \frac{1}{x}$  und stellen Sie in diesem die Lösungsmenge dieser Differenzialgleichung dar!
2. An einer bestimmten Stelle wurde nach der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl eine Flächenbelastung durch ein radioaktives Isotop von  $200 \text{ kBq/m}^2$  gemessen. Ein Jahr später wurde an der gleichen Stelle eine Belastung von noch  $195.43 \text{ kBq/m}^2$  gemessen. Bekannt ist, dass die Änderungsgeschwindigkeit der Radioaktivität proportional zu ihrer Höhe ist. Ermitteln Sie, nach welcher Zeit die Belastung auf  $150 \text{ kBq/m}^2$  gefallen sein wird!
3. Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung  $y' - \frac{\cos x}{2 + \sin x} y = 2 + \sin x$  !
4. Drehen Sie das kartesische  $x$ - $y$ -Koordinatensystem so, dass die Gleichung der Kurve  $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 26\sqrt{13}x + 13\sqrt{13}y = (x \ y) \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (26\sqrt{13} \ 13\sqrt{13}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$  in Hauptachsenlage überführt wird! Um was für eine Kurve handelt es sich? Stellen Sie die Kurve im  $x$ - $y$ -System grafisch dar!
5. a) Ermitteln Sie die allgemeine reelle Lösung des Systems  $\begin{aligned} \dot{x} &= -x + 4y \\ \dot{y} &= -2x + 3y \end{aligned}$  !  
b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, für die  $x(0) = 3$  und  $y(0) = 5$  gilt!
6. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe  $\begin{aligned} \dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= 3x - 5y \\ \dot{z} &= 2x - 4y + z \\ x(0) &= 3, y(0) = -2, z(0) = -1 \end{aligned}$  !

**Zusatzaufgabe**

**Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 6 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.**

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differenzialgleichung aus obiger Aufgabe 1 zusammen mit einigen ausgewählten Lösungen der Gleichungen in einen gemeinsamen Plot und beschriften Sie die Achsen. Beachten Sie, dass sich die Pfeile nur im Anstieg, nicht aber in ihrer Länge unterscheiden sollen.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der in den obigen Aufgaben 5 und 6 auftretenden Systemmatrizen und vergleichen Sie diese mit Ihren Ergebnissen.
3. Zeichnen Sie die Punkte  $(x, y)$ , welche die Gleichung in obiger Aufgabe 4 erfüllen, unter Verwendung des `contour`-Befehls und beschriften Sie die Achsen.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

## Hinweise zur MATLABaufgabe

### eig

Die Funktion `eig` dient der Bestimmung von Eigenwerten und der dazugehörigen Eigenvektoren. Zum Beispiel gibt der Befehl

```
>> eig( [1 2 ; 2 1] )
```

die Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

zurück. Ist man zusätzlich an den Eigenvektoren interessiert, so werden zwei Rückgabeargumente benötigt

```
>> [V,D] = eig( [1 2 ; 2 1] )
```

### contour

Mit `contour` können die Niveaumengen (Punkte mit gleichem Funktionswert, z.B. Höhenlinien auf einer Landkarte) einer Funktion dargestellt werden. Mit den Befehlen

```
>> x = linspace(-2, 2, 100);
```

```
>> y = linspace(-2, 2, 100);
```

```
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
```

```
>> Z = X.^2 + Y.^2;
```

```
>> contour(X,Y,Z)
```

werden einige Niveaumengen, also  $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$ , der Funktion  $f(x,y) = x^2 + y^2$  gezeichnet. Es ist möglich, die gewünschten Niveaus  $c$  selbst anzugeben, z.B. werden mit

```
>> contour(X,Y,Z,[1 2])
```

nur die beiden Kreise zum Niveau  $c = 1$  und  $c = 2$  gezeichnet. Will man nur ein Niveau zeichnen, muss dieses doppelt angegeben werden, z.B.

```
>> contour(X,Y,Z,[1 1])
```

### quiver

`quiver` dient dem Zeichnen von Pfeilen. Zum Beispiel zeichnet

```
>> quiver( [0 0 0], [-1 0 1], [2 -1 3] , [0 0 -2] )
```

die drei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

an die zugehörigen Stellen

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

siehe auch

```
>> help quiver
```