

## Höhere Mathematik I.1

### Aufgabenkomplex 3: Lineare Gleichungssysteme

**Letzter Abgabetermin: 26. Mai 2009**

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 3“  
kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

1. Lösen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus das Gleichungssystem
- $$\begin{aligned} 3x + 2y - 2z &= 2 \\ x + y - 4z &= 1 \\ -x + y + az &= b \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von den Parametern  $a$  und  $b$  !

2. Für welche Werte von  $a$  sind die Vektoren  $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ a \end{pmatrix}$  linear abhängig?

Stellen Sie in diesem Falle den dritten Vektor als Linearkombination der beiden anderen dar!

3. a) Wenden Sie den Gaußschen Algorithmus auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= -2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 &= 14 \\ 3x_1 - 11x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= b \quad \text{an!} \end{aligned}$$

b) Für welche Werte des Parameters  $b$  ist das Gleichungssystem lösbar?

c) Berechnen Sie im Falle der Lösbarkeit die allgemeine Lösung des Gleichungssystems!

4. Eine Firma verkauft 3 Produkte A, B und C zu Preisen von 4000, 1000 und 2000 Euro. Die Herstellung von Produkt A benötigt 3 Einheiten von Rohstoff 1 und 5 Einheiten von Rohstoff 2, für Produkt B werden je 1 Einheit der beiden Rohstoffe benötigt und für Produkt C 1 Einheit von Rohstoff 1 und 3 Einheiten von Rohstoff 2.

Bei einer kompletten Tagesproduktion wurden 17 Einheiten Rohstoff 1 und 31 Einheiten Rohstoff 2 verarbeitet, die Tagesproduktion wurde zu einem Gesamtpreis von 24 000 Euro verkauft.

- a) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der produzierten Zahl der einzelnen Produkte auf!
- b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!
- c) Wie viele verschiedene Lösungen für den beschriebenen Sachverhalt gibt es?
5. a) Bestimmen Sie die Koeffizienten aller Polynome höchstens fünften Grades  $P_5(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5$ , die an den Stellen  $x = -2, -1, 0, 1$  und  $2$  in dieser Reihenfolge die Werte  $96, 0, -16, -6$  und  $0$  annehmen!
- b) Welches Polynom vierten Grades hat die beschriebenen Eigenschaften?

**Zusatzaufgabe**

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -4 & 4 & -6 \\ -8 & 5 & 8 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

2. Lösen Sie das in Aufgabe 5 b) auftretende lineare Gleichungssystem mit MATLAB. Stellen Sie anschließend das berechnete Polynom vierten Grades zusammen mit den vorgegebenen Werten und einem von Ihnen ausgewählten Polynom (echt) fünften Grades aus Aufgabenteil a) in einem gemeinsamen Plot dar. Beschriften Sie die Achsen und fügen Sie eine Legende hinzu.

**Hinweis:** Der Plotfunktion kann ein weiterer Parameter übergeben werden, mit dem die Farbe und der Stil der Verbindungslinien eingestellt werden kann. Zum Beispiel wird mit 'rx' an jedem Punkt ein roter „x-Marker“ gezeichnet (siehe `>> help plot` und `>> doc plot`). Dies eignet sich, um die vorgegebenen Werte als einzelne Punkte darzustellen und um mehrere Funktionen durch verschiedene Farben leichter unterscheiden zu können.

3. Stellen Sie die drei Ebenen

$$3x + 2y - 2z = 2, \quad x + y - 4z = 1, \quad -x + y + 5z = 1$$

(vgl. Aufgabe 1, mit  $a = 5$ ,  $b = 1$ ) in einem gemeinsamen Plot dar. Wählen Sie Ihre Darstellung so, dass die Schnitte der Ebenen zu erkennen sind.

Öffnen Sie die erstellte diary-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete diary-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

## Hinweise zur MATLABaufgabe

### Gleichungssysteme

In MATLAB können lineare Gleichungssysteme mit dem Backslash-Operator gelöst werden. Beispiel:

```
>> A=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
>> b=[3; 1; 4]
>> x=A\b
```

Dabei ist zu beachten, dass die Systemmatrix  $A$  quadratisch ist und vollen Rang hat, damit die Gleichung für jede rechte Seite  $b$  eindeutig lösbar ist. Anderenfalls wird nur eine von eventuell mehreren möglichen Lösungen ausgegeben.

### Dreidimensionale Plots

Dreidimensionale Plots können mit dem Befehl `plot3` erzeugt werden, z.B. erzeugt

```
>> plot3([0,1],[2,-3],[4,5]);
```

eine Linie von  $(0,2,4)$  nach  $(1,-3,5)$ . Wie der `plot`-Befehl kann der `plot3`-Befehl durch zusätzliche Angaben ergänzt werden, z.B.

```
>> plot3(1,-1,4,'rx','MarkerSize',9,'LineWidth',2);
```

für die Darstellung des Punkts  $(1,-1,4)$  mit einem roten Kreuz von der vorgegebenen Größe.

Unter Octave-3.0.1 mit dem Plotprogramm Jhandle macht beim `plot3`-Befehl die Übergabe mehrerer Parameter in der angegebenen verkürzten Form Schwierigkeiten. In diesem Falle hilft die Angabe der Parameter in ausführlicher Form

```
>> plot3(1,-1,4,'Marker','x','Color','r','MarkerSize',9,
        'LineWidth',2);
```

### Darstellen von Ebenen

Um eine Ebene im 3-dimensionalen Raum darzustellen, kann man beispielsweise drei Punkte der Ebene auswählen und das von ihnen erzeugte Dreieck zeichnen. Der Befehl

```
>> patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2],[0 1 0]);
```

stellt die durch  $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$  gegebene Ebene dar, wobei  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  aus-

gewählte Punkte der Ebene sind. Durch Rotation (Tools → Rotate 3D) können Sie sich die 3-dimensionale Darstellung verdeutlichen. Mit

```
>> patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2],[0 0 1],'FaceAlpha',0.5);
```

kann man die Darstellung verbessern. Mit dem vierten Parameter (hier: `[0 0 1]`) werden die Rot-Grün-Blau-Anteile der Farbe eingestellt und mit dem letzten Parameter (hier: `0.5`) kann man die Transparenz des Objektes steuern.

Auch der zuletzt genannte Befehl funktioniert unter Octave-3.0.1 mit Jhandle nicht korrekt. Statt dessen sollte unter Octave der Befehl

```
>> patch([2 0 -1],[1 3 1],[1 3 -2], 'cdata',
        reshape([0 0 1],1,1,3),'FaceColor','flat','FaceAlpha',0.5);
```

verwendet werden.