Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

12. Mai 2009

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 3: Integralrechnung, Kurven im Raum

Letzter Abgabetermin: 26. Mai 2009
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 3“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch Rückführung auf Grundintegrale:

   a) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2x-1} + \pi \right) \mathrm{d}x$, b) $\int \frac{6x+1}{3x^2+x} \mathrm{d}x$, c) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} \mathrm{d}x$,

   d) $\int (x^2+3) \cos 2x \,\mathrm{d}x$, e) $\int \mathrm{e}^{2x+3} (4x+5) \,\mathrm{d}x$, f) $\int \frac{1}{x^2-8x+17} \mathrm{d}x$!

2. Berechnen Sie die bestimmten Integrale a) $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+16}$ und b) $\int\limits_2^4 \frac{|x-3|}{x^2} \mathrm{d}x$!

3. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, sofern diese konvergieren:

   a) $\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-1)^3} \mathrm{d}x$, b) $\int\limits_2^\infty \frac{1}{(x-1)^3} \mathrm{d}x$, c) $\int\limits_0^\infty \cos x \,\mathrm{d}x$, d) $\int\limits_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+1} \mathrm{d}x$!

4. Sei $f(x) = \sqrt{2x-x^2}\,(1-x)$.
   a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x)$!
   b) Bestimmen Sie die Stammfunktionen von $f(x)$ durch Rückführung auf ein Grundintegral mittels geeigneter Substitution!
   c) Berechnen Sie den positiven Flächeninhalt der über dem in a) ermittelten Definitionsbereich von der Funktion $f(x)$ und der x–Achse begrenzten Fläche!

5. Zwei Körper bewegen sich für $t \geq 0$ gemäß $\vec{s}_\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{s}_\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix}$.
   a) Berechnen Sie jeweils die Entfernung vom Koordinatenursprung, den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor sowie die Normalenrichtung in Abhängigkeit von t !
   b) Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven! Zeichnen Sie jeweils für $t=\pi$ den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvekor ein!

6. a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3+1 \\ t^2-1 \\ t^2+t \end{pmatrix}$ im Koordinatenursprung!
   b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt dieser Tangente mit der Ebene $z=0{,}11$!
   c) Vergleichen Sie diesen Schnittpunkt mit den Schnittpunkten der Kurve $\vec{x}(t)$ mit dieser Ebene! Was stellen Sie fest?

Zusatzaufgabe auf Seite 2

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie die in Aufgabe 6 gegebene Kurve $\vec{x}(t)$ in $t = [-2, 2]$ zusammen mit der in Aufgabe 6a) gefragten Tangente in einen gemeinsamen Plot. Beschriften Sie die Achsen und erstellen Sie eine Legende.

   Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `plot3`.
2. Auf Computern kann man bestimmte Integrale bequem durch Riemann-Summen approximieren.
   a) Implementieren Sie eine Funktion, welche die Riemann-Summe

   $$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

   mit $x_i = a + (b-a)\,\frac{i-1}{n-1}$ berechnet. (Vgl. Definition 4.45 der Vorlesung, dabei wird hier eine gleichmäßige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\xi_i = x_i$ vewendet.) Erstellen Sie dazu ein extra `m-File` und arbeiten Sie mit `function-handles`. Ihrer Funktion werden die folgenden Parameter übergeben:
   - die Funktion f, für die das bestimmte Integral berechnet werden soll (in Form eines `function-handles`),
   - die untere Integrationsgrenze a,
   - die obere Integrationsgrenze b,
   - die Anzahl der x_i, d.h. n.

   Zurückgegeben werden soll die obige Riemann-Summe.

   b) Benutzen Sie Ihre Funktion, um das bestimmte Integral aus der obigen Aufgabe 2a) für $n = 2$, $n = 32$ und $n = 512$ anzunähern und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

   c) Plotten Sie nun den Fehler in Abhängigkeit von n ($n \in [2^1, 2^{10}]$) in einen normalen und in einen doppelt-logarithmischen Plot (Plot, bei dem beide Achsen logartihmisch geteilt sind). Was können Sie beobachten?

   Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `loglog` zum zeichnen eines doppelt-logarithmischen Plots.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur `MATLAB`aufgabe

inline function-handles

`Inline function-handles` erlauben es, für kleine („einzeilige“) Funktionen ein `function-handle` direkt zu erzeugen, ohne extra ein `m-File` anlegen zu müssen. Zum Beispiel kann man mit

```
≫ f = @(x)x^2+1
```

ein `function-handle` für die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ erzeugen und mit

```
≫ f(4)
```

an einer bestimmten Stelle (hier 4) auswerten. Solche Funktionen lassen sich auch „vektorisieren“. Beispielsweise erlaubt

```
≫ f = @(x)x.^2+1
```

die gleichzeitige Auswertung an mehreren Stellen, z.B.

```
≫ f([3 4 5])
```

Aufgabenkomplex 3: Integralrechnung, Kurven im Raum

Letzter Abgabetermin: 26. Mai 2009

---

1. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch Rückführung auf Grundintegrale:

a) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{2x-1}+\pi\right)\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{6x+1}{3x^2+x}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int (x^2+3)\,\cos 2x\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x+3}\,(4x+5)\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-8x+17}\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

a) $$\int \left(x^{2/3}+\frac{1}{2x-1}+\pi\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{5}x^{5/3}+\frac{1}{2}\ln|2x-1|+\pi x+C$$

b) Substitution: $t=3x^2+x$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=6x+1$, $\mathrm{d}t=(6x+1)\,\mathrm{d}x$
$$\int \frac{6x+1}{3x^2+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t|+C = \ln\left|3x^2+x\right|+C$$

c) Substitution: $t=\cos x$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\sin x\,\mathrm{d}x$, $-\mathrm{d}t=\sin x\,\mathrm{d}x$
$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t}+C = -2\sqrt{\cos x}+C$$

d) Partielle Integration:
$$\begin{aligned}\int (x^2+3)\,\cos 2x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(x^2+3)\,\sin 2x-\frac{1}{2}\int 2x\,\sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x^2+3)\,\sin 2x-\int x\,\sin 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}(x^2+3)\,\sin 2x-\left(-\frac{1}{2}x\,\cos 2x+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{2}(x^2+3)\sin 2x+\frac{1}{2}x\cos 2x-\frac{1}{4}\sin 2x+C = \frac{1}{2}\left(\left(x^2+\frac{5}{2}\right)\sin 2x+x\cos 2x\right)+C\end{aligned}$$

e) Partielle Integration:
$$\int \mathrm{e}^{2x+3}(4x+5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(4x+5)\,\mathrm{e}^{2x+3}-2\int \mathrm{e}^{2x+3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(4x+5)\,\mathrm{e}^{2x+3}-\mathrm{e}^{2x+3}+C = \left(2x+\frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{2x+3}+C$$

f) $$\int \frac{1}{x^2-8x+17}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-4)^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan(x-4)+C$$

---

2. Berechnen Sie die bestimmten Integrale a) $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+16}$ und b) $\displaystyle\int_2^4 \frac{|x-3|}{x^2}\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

a) $$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+16} &= \frac{1}{16}\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\frac{x^2}{16}+1} = \frac{1}{16}\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{4}\right)^2+1} = \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{4\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{4}\arctan t\Big|_0^1\\ &= \frac{1}{4}(\arctan 1-\arctan 0) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

b) $$\int\limits_2^4 \frac{|x-3|}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \frac{3-x}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \frac{x-3}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_2^3 \left(\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x + \int\limits_3^4 \left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[-\frac{3}{x}-\ln x\right]_2^3 + \left[\ln x + \frac{3}{x}\right]_3^4 = \left(-1-\ln 3+\frac{3}{2}+\ln 2\right) + \left(\ln 4 + \frac{3}{4} - \ln 3 - 1\right)$$
$$= -2-2\ln 3+\frac{3}{2}+\ln 2+\ln 4+\frac{3}{4} = \frac{1}{4}+\ln\frac{2\cdot 4}{3^2} = \frac{1}{4}+\ln\frac{8}{9} \approx 0.1322$$

---

3. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, sofern diese konvergieren:

a) $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int\limits_2^\infty \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

a) $$\int\limits_1^2 \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{1}{2(x-1)^2}\right|_1^2 = -\frac{1}{2}-(-\infty) = \infty, \text{ d.h. konvergiert nicht}$$

b) $$\int\limits_2^\infty \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = -\left.\frac{1}{2(x-1)^2}\right|_3^\infty = 0-\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

c) $$\int\limits_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\,[\sin x]_0^A = \lim_{A\to\infty}(\sin A - 0) = \lim_{A\to\infty}\sin A \text{ divergiert unbestimmt}$$

d) $$\int\limits_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x|_{-\infty}^1 = \arctan 1 - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

---

4. Sei $f(x) = \sqrt{2x-x^2}\,(1-x)$.

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x)$!

b) Bestimmen Sie die Stammfunktionen von $f(x)$ durch Rückführung auf ein Grundintegral mittels geeigneter Substitution!

c) Berechnen Sie den positiven Flächeninhalt der über dem in a) ermittelten Definitionsbereich von der Funktion $f(x)$ und der x–Achse begrenzten Fläche!

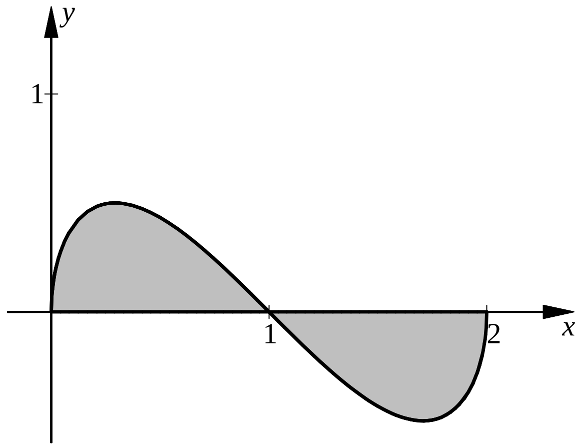
Lösung:

a) Die Funktion ist definiert, wenn die Wurzel existiert. Dies ist für $2x-x^2=(2-x)x\geq 0$, d.h. $0\leq x\leq 2$ der Fall.

b) $t = 2x-x^2$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2-2x$, $\quad \dfrac{\mathrm{d}t}{2} = (1-x)\,\mathrm{d}x$

$$\int\sqrt{2x-x^2}\,(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C = \underline{\underline{\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}+C}}$$

c)



Offensichtlich gilt $f(x) = \begin{cases} \geq 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ \leq 0 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

$$F = \int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,(1-x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \sqrt{2x-x^2}\,(1-x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

---

5. Zwei Körper bewegen sich für $t \geq 0$ gemäß $\vec{s}_\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{s}_\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t\sin t \\ \sin t - t\cos t \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie jeweils die Entfernung vom Koordinatenursprung, den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor sowie die Normalenrichtung in Abhängigkeit von t !

b) Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven! Zeichnen Sie jeweils für $t=\pi$ den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvekor ein!

Lösung:

a) **Körper A:**

Entfernung vom Koordinatenursprung: $\|\vec{s}_\mathrm{A}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$,
d.h. Bewegung längs Einheitskreis

Geschwindigkeit: $\vec{v}_\mathrm{A}(t) = \dot{\vec{s}}_\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Beschleunigung: $\vec{a}_\mathrm{A}(t) = \ddot{\vec{s}}_\mathrm{A}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

Normalenrichtung orthogonal zur Tangentenrichtung, d.h. zur Geschwindigkeit: $\begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

(Da der Betrag des Geschwindigkeitsvektors konstant ist, zeigt der Beschleunigungsvektor in Normalenrichtung, vgl. Aufgabe 3 aus Übung 9.)

Körper B:

Entfernung vom Koordinatenursprung:
$\|\vec{s}_\mathrm{B}(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}$,
d.h. wächst mit der Zeit

Geschwindigkeit: $\vec{v}_\mathrm{B}(t) = \dot{\vec{s}}_\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t + \sin t + t\cos t \\ \cos t - \cos t + t\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix}$, d.h. $\|\vec{v}_\mathrm{B}(t)\| = t$

Beschleunigung: $\vec{a}_\mathrm{B}(t) = \ddot{\vec{s}}_\mathrm{B}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \end{pmatrix}$

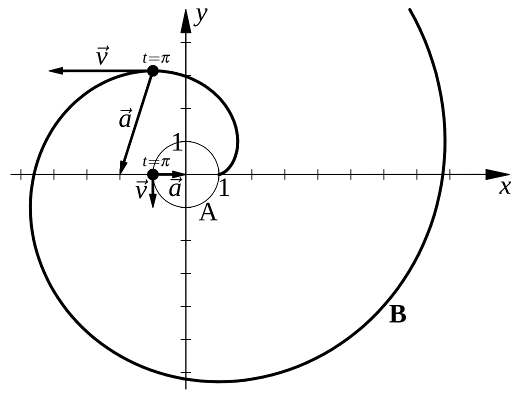
Normalenrichtung orthogonal zur Tangentenrichtung, d.h. zur Geschwindigkeit:
$\begin{pmatrix} -t\sin t \\ t\cos t \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

b) **Körper A:** dünne Kurve, wiederholt durchlaufen

$\vec{s}_\mathrm{A}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\mathrm{A}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_\mathrm{A}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

Körper B: dicke Kurve

$\vec{s}_\mathrm{B}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix}$, $\vec{v}_\mathrm{B}(\pi) = \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_\mathrm{B}(\pi) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\pi \end{pmatrix}$



---

6. a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3+1 \\ t^2-1 \\ t^2+t \end{pmatrix}$ im Koordinatenursprung!

b) Ermitteln Sie den Schnittpunkt dieser Tangente mit der Ebene $z=0{,}11$!

c) Vergleichen Sie diesen Schnittpunkt mit den Schnittpunkten der Kurve $\vec{x}(t)$ mit dieser Ebene! Was stellen Sie fest?

Lösung:

a) Koordinatenursprung: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3+1 \\ t^2-1 \\ t^2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies t^3+1=0 \implies t=-1.$

Offensichtlich sind für $t=-1$ auch die beiden anderen Komponenten gleich 0, so dass tatsächlich $\vec{x}(-1)=\vec{0}$ ist.

$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}'(-1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, Tangente: $\vec{T}(u) = \vec{x}(-1) + u\vec{x}'(-1) = u\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Die Tangente $\vec{T}(u) = \begin{pmatrix} 3u \\ -2u \\ -u \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene $z=0.11$ für $-u=0.11$, $-u=0.11$, also im Punkt $(-0.33, 0.22, 0.11)$.

c) $t^2+t=0.11$, $t^2-t-0.11=0$, $t_{1/2} = -0.5 \pm \sqrt{0.25+0.11} = -0.5 \pm 0.6 = \begin{cases} 0.1 \\ -1.1 \end{cases}$

Damit erhält man für die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der Ebene $z=0{,}11$ die Ortsvektoren $\vec{x}(0.1) = \begin{pmatrix} 1.001 \\ -0.99 \\ 0.11 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}(-1.1) = \begin{pmatrix} -0.331 \\ 0.21 \\ 0.11 \end{pmatrix}$. Der 2. Schnittpunkt, der zu dem in der Nähe von $t=-1$ liegenden Parameter $t=-1.1$ gehört, liegt in der Nähe des Schnittpunktes der Tangente mit der Ebene. In der Nähe von $\vec{x}(-1)=\vec{0}$ wird die Kurve durch die berechnete Tangente approximiert.

Die Kurve $\vec{x}(t)$ schneidet die Ebene x-y-Ebene auch im Punkt $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t=0$. Der 1. Schnittpunkt mit der Ebene $z=0.11$ gehört zu dem in der Nähe von $t=0$ liegenden Parameter $t=0.1$.

Zusatzaufgabe

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit `MATLAB`. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie die in Aufgabe 6 gegebene Kurve $\vec{x}(t)$ in $t = [-2, 2]$ zusammen mit der in Aufgabe 6a) gefragten Tangente in einen gemeinsamen Plot. Beschriften Sie die Achsen und erstellen Sie eine Legende.

   Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `plot3`.

2. Auf Computern kann man bestimmte Integrale bequem durch Riemann-Summen approximieren.

   a) Implementieren Sie eine Funktion, welche die Riemann-Summe

   $$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

   mit $x_i = a + (b-a)\,\frac{i-1}{n-1}$ berechnet. (Vgl. Definition 4.45 der Vorlesung, dabei wird hier eine gleichmäßige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\xi_i = x_i$ vewendet.) Erstellen Sie dazu ein extra `m-File` und arbeiten Sie mit `function-handles`. Ihrer Funktion werden die folgenden Parameter übergeben:

   - die Funktion f, für die das bestimmte Integral berechnet werden soll (in Form eines `function-handles`),
   - die untere Integrationsgrenze a,
   - die obere Integrationsgrenze b,
   - die Anzahl der x_i, d.h. n.

   Zurückgegeben werden soll die obige Riemann-Summe.

   b) Benutzen Sie Ihre Funktion, um das bestimmte Integral aus der obigen Aufgabe 2a) für $n = 2$, $n = 32$ und $n = 512$ anzunähern und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.

   c) Plotten Sie nun den Fehler in Abhängigkeit von n ($n \in [2^1, 2^{10}]$) in einen normalen und in einen doppelt-logarithmischen Plot (Plot, bei dem beide Achsen logartihmisch geteilt sind). Was können Sie beobachten?

   Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `loglog` zum zeichnen eines doppelt-logarithmischen Plots.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Lösung:

nachbereitete `diary`-Datei (Kommentare durch `%` gekennzeichnet) und Plots auf den nächsten Seiten

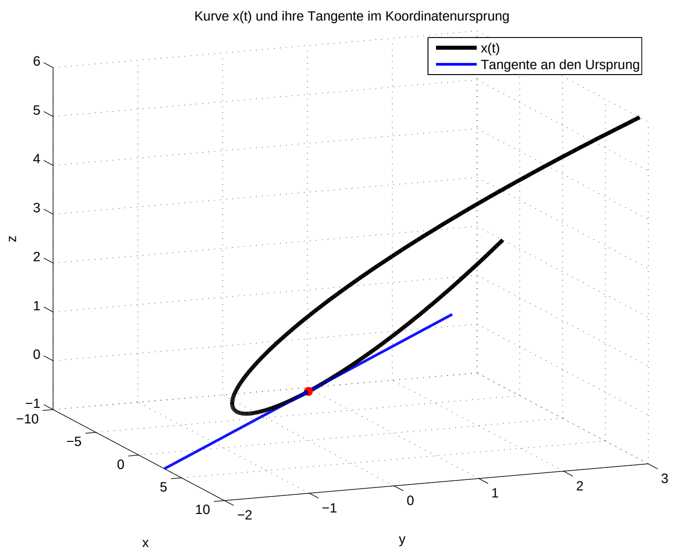
```
% -------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 1
% -------------------------------------------------------------------------

t1=linspace(-2,2,300);
% Funktion x(t) auswerten
x=[ t1.^3 + 1 ; t1.^2 - 1 ; t1.^2 + t1 ];

t2=linspace(-2,0,300);
% Tangente T(t) auswerten
T=[ 3*(t2+1) ; -2*(t2+1) ; -1*(t2+1)];

figure(1); clf; hold on;
% Funktion zeichnen
plot3(x(1,:), x(2,:), x(3,:), 'LineStyle','-','Color','k','LineWidth',3);
% Tangente zeichnen
plot3(T(1,:), T(2,:), T(3,:), 'LineStyle','-','Color','b','LineWidth',2);
% Ursprung markieren
plot3(0, 0, 0, 'Marker','.','Color','r','MarkerSize',20);
% Betrachterstandpunkt
view(68,16);

% Label, Title, Legend
xlabel('x'); ylabel('y'); zlabel('z'); grid on;
title('Kurve x(t) und ihre Tangente im Koordinatenursprung');
legend('x(t)', 'Tangente an den Ursprung', 'Location', 'NorthEast');
print -depsc HA03_matlab_plot_1.eps
```




```
% -------------------------------------------------------------------------
% Aufgabe 2
% -------------------------------------------------------------------------

% a) ----------------------------------------------------------------------

% Listing des m-Files HA03_matlab_solution_RiemannSumme.m
type HA03_matlab_solution_RiemannSumme.m

function I=RiemannSumme(f, a, b, n)

% Berechne x_i
x = linspace(a,b,n);
% Alternative:
% x = a + (b-a) * (0:n-1)/(n-1);

% Werte f an allen x_i aus
fx = f(x);

% Summiere diese Werte (bis auf den letzten)
I = sum(fx(1:end-1));

% Die x_i sind gleichmäßig verteilt, daher gilt
% (x_i+1 - x_i) = (b-a)/(n-1)  für alle i.
I = I*(b-a)/(n-1);

% Ende des Listings des m-Files HA03_matlab_solution_RiemannSumme.m


% b) ----------------------------------------------------------------------

% Inline Funktion definieren
f = @(x)1./(x.^2+16);

% Exakter Wert des Integrals
I_exakt = pi/16

I_exakt =
    0.1963

% Integral approximieren
n = 2;
I = HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n);
fprintf('n=%3d,   Riemann-Summe=%6.4f,   Fehler=%8.2E\n',n,I,abs(I_exakt-
I));
n=  2,   Riemann-Summe=0.2500,   Fehler=5.37E-002

n = 32;
I = HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n);
fprintf('n=%3d,   Riemann-Summe=%6.4f,   Fehler=%8.2E\n',n,I,abs(I_exakt-
I));
n= 32,   Riemann-Summe=0.1984,   Fehler=2.01E-003

n = 512;
I = HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n);
fprintf('n=%3d,   Riemann-Summe=%6.4f,   Fehler=%8.2E\n',n,I,abs(I_exakt-
I));
n=512,   Riemann-Summe=0.1965,   Fehler=1.22E-004
```

```
n = 2^20;
I = HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n);
fprintf('\nn=%7d, Riemann-Summe=%11.9f, pi/16=%11.9f, Fehler=%8.2E\n',n,I,
I_exakt,abs(I_exakt-I));

n=1048576, Riemann-Summe=0.196349600, pi/16=0.196349541, Fehler=5.96E-008


% c) -------------------------------------------------------------------

Anz=10;
n = 2.^(1:Anz);

for i=1:Anz,
  Fehler(i)=abs(I_exakt - HA03_matlab_solution_RiemannSumme(f,0,4,n(i)));
end

% Normaler Plot
figure(2); clf; hold on;
plot(n, Fehler, 'b-*');
% Label, Title, Legend
xlabel('n'); ylabel('Fehler');
title('Integrationsfehler in Abhängigkeit von n');
legend('Integrationsfehler', 'Location', 'NorthEast');
print -depsc HA03_matlab_plot_2c1.eps

% LogLog Plot
figure(3); clf;
loglog(n, Fehler,'b-*'); hold on;
% Label, Title, Legend
xlabel('n'); ylabel('Fehler');
title('Integrationsfehler in Abhängigkeit von n');
legend('Integrationsfehler', 'Location', 'NorthEast');
print -depsc HA03_matlab_plot_2c2.eps

% Hier sieht man eine Gerade mit Steigung -1.
%
% (Der Fehler verhält sich ca. wie 0.062/n, deshalb verhält sich
%  der dekadische Logarithmus des Fehlers ca. wie  -1.2 - lg n.)

diary off
```