

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 3: Integralrechnung, Kurven im Raum

Letzter Abgabetermin: 26. Mai 2009

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 3“
kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

1. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch Rückführung auf Grundintegrale:

a) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2x-1} + \pi \right) dx,$ b) $\int \frac{6x+1}{3x^2+x} dx,$ c) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}} dx,$
d) $\int (x^2+3) \cos 2x dx,$ e) $\int e^{2x+3} (4x+5) dx,$ f) $\int \frac{1}{x^2-8x+17} dx !$

2. Berechnen Sie die bestimmten Integrale a) $\int_0^4 \frac{dx}{x^2+16}$ und b) $\int_2^4 \frac{|x-3|}{x^2} dx !$

3. Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, sofern diese konvergieren:

a) $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^3} dx,$ b) $\int_2^\infty \frac{1}{(x-1)^3} dx,$ c) $\int_0^\infty \cos x dx,$ d) $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2+1} dx !$

4. Sei $f(x) = \sqrt{2x-x^2} (1-x).$

- Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $f(x)$!
- Bestimmen Sie die Stammfunktionen von $f(x)$ durch Rückführung auf ein Grundintegral mittels geeigneter Substitution!
- Berechnen Sie den positiven Flächeninhalt der über dem in a) ermittelten Definitionsbereich von der Funktion $f(x)$ und der x -Achse begrenzten Fläche!

5. Zwei Körper bewegen sich für $t \geq 0$ gemäß $\vec{s}_A(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{s}_B(t) = \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix}.$

- Berechnen Sie jeweils die Entfernung vom Koordinatenursprung, den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor sowie die Normalenrichtung in Abhängigkeit von t !
- Skizzieren Sie die beiden Bahnkurven! Zeichnen Sie jeweils für $t = \pi$ den Geschwindigkeits- und den Beschleunigungsvektor ein!

6. a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3+1 \\ t^2-1 \\ t^2+t \end{pmatrix}$ im Koordinatenursprung!

- Ermitteln Sie den Schnittpunkt dieser Tangente mit der Ebene $z=0,11$!
- Vergleichen Sie diesen Schnittpunkt mit den Schnittpunkten der Kurve $\vec{x}(t)$ mit dieser Ebene! Was stellen Sie fest?

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie die in Aufgabe 6 gegebene Kurve $\vec{x}(t)$ in $t = [-2, 2]$ zusammen mit der in Aufgabe 6a) gefragten Tangente in einen gemeinsamen Plot. Beschriften Sie die Achsen und erstellen Sie eine Legende.

Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `plot3`.

2. Auf Computern kann man bestimmte Integrale bequem durch Riemann-Summen approximieren.
 - a) Implementieren Sie eine Funktion, welche die Riemann-Summe

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) (x_{i+1} - x_i)$$

mit $x_i = a + (b - a) \frac{i-1}{n}$ berechnet. (Vgl. Definition 4.45 der Vorlesung, dabei wird hier eine gleichmäßige Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\xi_i = x_i$ verwendet.) Erstellen Sie dazu ein extra `m-File` und arbeiten Sie mit `function-handles`. Ihrer Funktion werden die folgenden Parameter übergeben:

- die Funktion f , für die das bestimmte Integral berechnet werden soll (in Form eines `function-handle`),
- die untere Integrationsgrenze a ,
- die obere Integrationsgrenze b ,
- die Anzahl der x_i , d.h. n .

Zurückgegeben werden soll die obige Riemann-Summe.

- b) Benutzen Sie Ihre Funktion, um das bestimmte Integral aus der obigen Aufgabe 2a) für $n = 2$, $n = 32$ und $n = 512$ anzunähern und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.
- c) Plotten Sie nun den Fehler in Abhängigkeit von n ($n \in [2^1, 2^{10}]$) in einen normalen und in einen doppelt-logarithmischen Plot (Plot, bei dem beide Achsen logarithmisch geteilt sind). Was können Sie beobachten?

Hinweis: Verwenden Sie den Befehl `loglog` zum zeichnen eines doppelt-logarithmischen Plots.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur MATLABaufgabe

inline function-handles

Inline function-handles erlauben es, für kleine („einzeilige“) Funktionen ein function-handle direkt zu erzeugen, ohne extra ein m-File anlegen zu müssen. Zum Beispiel kann man mit

```
>> f = @(x)x^2+1
```

ein function-handle für die Funktion $f(x) = x^2 + 1$ erzeugen und mit

```
>> f(4)
```

an einer bestimmten Stelle (hier 4) auswerten. Solche Funktionen lassen sich auch „vektorisieren“. Beispielsweise erlaubt

```
>> f = @(x)x.^2+1
```

die gleichzeitige Auswertung an mehreren Stellen, z.B.

```
>> f([3 4 5])
```