

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 2: Vektoren und Matrizen

Letzter Abgabetermin: 12. Mai 2009

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

**Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 2“
kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!**

1. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Ausdrücke, sofern diese existieren:

a) $AB\vec{d}$, b) $\vec{d}BA^T$, c) $\vec{d}\vec{c}^T + A^T$, d) $A\vec{d} + \vec{c}$, e) $B\vec{c} + \vec{d}$, f) $B\vec{d} + \vec{c}^T$, g) $\vec{c}^T A\vec{d}$, h) $(A\vec{d})^T A$!

2. a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a die Dimension der linearen Hülle der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$! Was stellt diese Menge geometrisch dar?

b) Gehören die Vektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ der linearen Hülle an?

3. Was bewirkt die Multiplikation einer dreispaltigen Matrix von rechts mit

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bzw. d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

4. Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$!

Für welche Werte von a und b hat die Matrix den maximalen Rang?

5. a) Berechnen Sie die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$!

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Inversen!

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei.

1. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \alpha = 2.$$

- a) Berechnen Sie $A + B$, $A - B$, αA , $A\vec{w}$, $AB\vec{w}$, \vec{w}^\top , A^\top , B^\top , $A^\top\vec{w}$ und $(A^\top)^\top$.
- b) Berechnen Sie AB , BA , $(A + B)^\top$, $A^\top + B^\top$, $(\alpha A)^\top$, αA^\top , $(AB)^\top$, $B^\top A^\top$ sowie $A^\top B^\top$. Überzeugen Sie sich für dieses Beispiel von der Nichtkommutativität der Multiplikation (Beispiel 2.25 (b) der Vorlesung) und den Rechenregeln für das Transponieren (Satz 2.26 (f)-(h) der Vorlesung).

2. Berechnen Sie die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie AA^{-1} , um die Korrektheit des Ergebnisses zu prüfen.

3. Es sei

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 3 & 4 \\ -4 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie EC , CE , $E\vec{p}$, $C\vec{p}$, $\vec{p}^\top C$, CP und PC . (Überlegen Sie sich vor der Befehlseingabe, welche Ergebnisse zu erwarten sind.)

4. Berechnen Sie die Determinante sowie den Rang der Matrix aus Aufgabe 4 für die Fälle $a = 1, b = 5$ und $a = -6, b = 7$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrer Lösung von Aufgabe 4.

Öffnen Sie die erstellte diary-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete diary-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur MATLABaufgabe

Matrizen und Vektoren

In MATLAB wird nicht zwischen einem Vektor und einer Matrix unterschieden. Spalten-/Zeilenvektoren sind Matrizen mit nur einer Spalte/Zeile. Matrizen werden in eckigen Klammern zeilenweise eingegeben. Hierbei wird das Zeilenende mit einem Semikolon angezeigt. Die Einträge in einer Zeile können mit einem Komma abgetrennt werden. Der folgende Befehl erzeugt die beiden Matrizen A und B aus Beispiel 2.25 aus der Vorlesung.

```
>> A=[2 1 3; -1 0 1]
>> B=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
```

Analog ergibt sich die Eingabe eines Spaltenvektors als Eingabe einer Matrix mit nur einer Spalte. Beispiel:

```
>> v=[-3; 4; 7]
>> w=[-2; -3; 1]
```

Vektoren können genutzt werden, um daraus Matrizen zu erzeugen. Beispiel:

```
>> C=[v w [1; -1; 4]]
```

Ein Zugriff auf einen Eintrag geschieht durch die Angabe der Zeilen- und Spaltennummer.

Beispiel:

```
>> A(2,3)
>> v(3)
>> v(3)=5
>> v
```

Um auf eine ganze Zeile/Spalte zugreifen, verwendet man einen Doppelpunkt. Beispiel:

```
>> A(:,3)
>> A(1,:)
```

Die Einheitsmatrix der Größe 3×3 und die Nullmatrix der Größe 2×3 lassen sich wie folgt erzeugen.

```
>> E=eye(3)
>> Z=zeros(2,3)
```

Das Rechnen mit Matrizen funktioniert mit den „natürlichen“ Rechenzeichen. Beispiel:

```
>> B+C
>> 2*A
>> B*v
>> A*B
```

Das Transponieren einer Matrix wird mit einem Hochkomma realisiert. Beispiel:

```
>> A'
>> B'
>> v'
>> B'*A'
```

Die Inverse einer Matrix kann mit dem Befehl `inv` und die Determinante mit dem Befehl `det` berechnet werden. Beispiel:

```
>> A=[1, -1, 2; -4, 2, 0; 1, 0, 3]
>> inv(A)
>> det(A)
```

Der Rang einer Matrix A lässt sich mit

```
>> rank(A)
```

bestimmen.