

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 2: Differenzialrechnung

Letzter Abgabetermin: 05. Mai 2009

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 2“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

- Die Gleichung $e^x = 3x$ soll mithilfe des Newtonverfahrens gelöst werden.
 - Ermitteln Sie zunächst eine Lösung dieser Gleichung ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$!
 - Verwenden Sie nun den Startwert $x_0 = 1,1$! Erklären Sie den dabei zu beobachtenden Effekt!
 - Wieviele Lösungen hat die Gleichung?
 - Bestimmen Sie die evtl. noch fehlenden Lösungen mithilfe des Newtonverfahrens!
- Bei einem Preis von 1,20 € pro Liter werden in Deutschland 75 Millionen Liter Benzin pro Tag abgesetzt, die Elastizität der Nachfrage bezüglich des Preises betrage $-0,3$. Welche relative und welche absolute Entwicklung der Nachfrage ist ungefähr zu erwarten, wenn der Preis von 1,20 € auf 1,25 € pro Liter steigt?
- Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der l'Hospitalschen Regel:
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$,
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$,
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$,
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2 - x}$!
- Der Querschnitt eines Tunnels habe die Form eines Rechtecks mit Grundseite d und Höhe h , auf das ein Halbkreis mit Durchmesser d aufgesetzt ist. Der Umfang des Querschnitts beträgt 20 m. Bestimmen Sie die Grundseitenlänge d , für die der Flächeninhalt des Querschnitts am größten wird!
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden 1000 Bakterien in eine Nährlösung gegeben. Die Zahl der Bakterien entwickelt sich nach der Formel $f(t) = \frac{G}{1 + Ae^{-0,2t}}$, wobei die Sättigungsgrenze bei 20000 Bakterien liegt.
 - Bestimmen Sie die Parameter G und A !
 - Zeigen Sie, dass die Funktion $f(t)$ monoton wachsend ist!
 - Zu welchem Zeitpunkt beträgt die Zahl der Bakterien 10000 ? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die Wachstumsgeschwindigkeit der Population?
 - Zu welchem Zeitpunkt wächst die Population am stärksten?
- Ein 30 Jahre alter Baum ist 11,52 m hoch und wächst in diesem Alter mit einer Geschwindigkeit von 48 cm/a (a: Jahr). Die Wachstumsgeschwindigkeit wächst ihrerseits um $1,2 \text{ cm/a}^2$.
 - Bestimmen Sie mithilfe der Taylorschen Formel näherungsweise die Höhe, die der Baum in einem Alter von 35 Jahren erreicht haben wird!
 - Auch die Änderung der Wachstumsgeschwindigkeit ist nicht konstant. Es wird aber angenommen, dass sie sich in der betrachteten Zeit um nicht mehr als $0,3 \text{ cm/a}^3$ ändert. Schätzen Sie unter dieser Annahme den Fehler des Ergebnisses von a) ab!

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Zeichnen Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)$ und die Taylor-Polynome ungeraden Grades bis zur 11ten Ordnung mit der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ im Intervall $[-4\pi, 4\pi]$ in einen gemeinsamen Plot. Beschriften Sie die Achsen und erstellen Sie eine Legende. Verwenden Sie den Befehl `axis`, um einen angemessenen Bildausschnitt auszuwählen.
2. a) Implementieren Sie das Newton-Verfahren. Erstellen Sie dazu ein extra `m-File` und arbeiten Sie mit `function-handles`. Ihrer Funktion werden die folgenden Parameter übergeben
 - die Funktion F , auf die das Verfahren angewandt werden soll (in Form eines `function-handle`),
 - die Ableitung der Funktion F (in Form eines `function-handle`),
 - der Startwert x_0 .

Zurückgegeben werden soll ein Vektor $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, welcher die gesamte Iterationsfolge enthält. Verwenden sie $\varepsilon = 10^{-8}$ als Parameter für das Abbruchkriterium (Schritt 3 im Algorithmus).

- b) Wenden Sie Ihr `m-File` zum Newton-Verfahren auf die Funktion aus Hausaufgabenkomplex I, MATLAB-Aufgabe 2a) ($f(x) = \ln(x+1) \sin(x^2)$) mit den Startwerten
 - i. $x_0 = 1.50$
 - ii. $x_0 = 1.43$
 - iii. $x_0 = 1.40$

an. Zeichnen Sie jeweils die Funktion f und den Verlauf der Iterierten.

- c) Setzen Sie nun das Newton-Verfahren ein, um x mit $f'(x) = 0$ zu finden. Verwenden Sie die Startwerte
 - i. $x_0 = 1.70$
 - ii. $x_0 = 3.17$
 - iii. $x_0 = 0.70$

und zeichnen Sie die Funktion f und f' sowie jeweils den Verlauf der Iterierten. Bestätigen Sie anhand der zweiten Ableitung, dass es sich bei der jeweils letzten Iterierten um ein lokales Maximum, ein lokales Minimum bzw. einen Sattelpunkt handelt.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur MATLABaufgabe

Schleifen

MATLAB unterstützt die Verwendung von `while`-Schleifen und `for`-Schleifen, siehe:

```
>> help while
>> help for
```

Als Beispiel dient das folgende kleine Programm. Es tabelliert die Sinus-Funktion im Intervall $[0, 2\pi]$ im Abstand von $\frac{\pi}{4}$.

```
>> m=1;
>> fprintf('\n\n      n*pi/4           sin(n*pi/4)\n')
>> while m<10,
>>     x(m)=(m-1)*pi/4;
>>     fprintf('%1.0f%16.10f%16.10f\n',m-1,x(m),sin(x(m)))
>>     m=m+1;
>> end
```

function-handles

Function-handles ermöglichen es, Funktionen an Funktionen zu übergeben. Als Beispiel wollen wir hier in einer Funktion die Werte $f(0) + f(1) + \dots + f(5)$ berechnen, wobei die Funktion f durch ein function-handle übergeben wird. Dazu erstellen wir das m-File `Summe0bis5.m` mit dem Inhalt:

```
function Summe = Summe0bis5(f)
    Summe = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5);
```

Wir nutzen als Beispiel für die Funktion f zunächst die `sin`-Funktion,

```
>> Summe0bis5(@sin)
```

Ein function-handle für die `sin`-Funktion wird also durch das voranstellen des `@` erreicht. Anstatt für jede erdenkliche Funktion f eine eigene Funktion zur Summation zu verwenden, genügt die Funktion `Summe0bis5`. Sie können auch Ihre eigenen Funktionen übergeben, sofern diese in m-Files ausgelagert sind:

```
>> Summe0bis5(@Name_des_m-Files)
```

Weitere Hinweise zu function-handles finden Sie in der MATLAB-Hilfe,

```
>> help function_handle
```