Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

14. April 2009

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 1: Grundlagen, Komplexe Zahlen

Letzter Abgabetermin: 28. April 2009
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Angenommen, ein Händler verkauft ein Produkt um 20% teurer als der Einkaufspreis.
   a) Wieviel Prozent beträgt der Gewinn je Produkt bezogen auf den Verkaufspreis?
   b) Während einer Rabattaktion wird der Verkaufspreis des Produktes um 5% reduziert. Um wieviel Prozent reduziert sich der Gewinn je Produkt?
   c) Während der Rabattaktion verkauft der Händler 50% mehr Einheiten des Produktes als in diesem Zeitraum üblich. Um wieviel Prozent ist sein Gesamtgewinn mit diesem Produkt während der Rabattaktion höher oder niedriger als üblich?

   Der Einfachheit halber soll die Anwendung der Mehrwertsteuer hierbei nicht berücksichtigt werden.

2. Für den Besuch einer Veranstaltung gilt „Studenten zahlen den ermäßigten Eintrittspreis“. Aus welchen der folgenden Aussagen können aufgrund dieser Implikation Folgerungen gezogen werden, wenn ja, welche?
   a) Der Besucher ist Student.
   b) Der Besucher ist kein Student.
   c) Der Besucher zahlt den ermäßigten Preis.
   d) Der Besucher zahlt den vollen Preis.
   e) Eine Besuchergruppe besteht nur aus Studenten.
   f) Eine Besuchergruppe besteht aus Studenten und Nichtstudenten.
   g) Alle Personen einer Besuchergruppe zahlen den vollen Preis.
   h) Alle Personen einer Besuchergruppe zahlen den ermäßigten Preis.

3. a) Gegeben seien folgende Größen:

i	0	1	2	3	4	5
a_i	3	2	-1	1	1	5
b_{1i}	-2	4	0	1	3	-3
b_{2i}	1	7	-4	0	3	1

   Berechnen Sie

$$\sum_{i=0}^{5} a_i, \quad \sum_{k=2}^{4} a_{k-1}, \quad \sum_{i=0}^{5}\sum_{j=1}^{2} b_{1i}b_{j5},$$

$$\sum_{i=1}^{2}\left(a_i \sum_{j=2}^{4} b_{ij}\right), \quad \sum_{m=0}^{5} m\,b_{2m} \ !$$

   b) Formulieren Sie die folgenden Ausdrücke unter Verwendung des Summenzeichens:
   – Summe der geraden Zahlen von 20 bis 40
   – Summe der Quadratwurzeln der ersten n natürlichen Zahlen ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$)
   Die Berechnung der Ergebnisse ist nicht nötig.

4. Für welche reellen x ist die Ungleichung $\dfrac{2x^2 - x - 14}{x^2 + x - 6} \leq 1$ erfüllt?

b.w.

5. Für die Nutzung von Computerprogrammen zum wissenschaftlichen Rechnen müssen die Eingabeparameter in einem einheitlichen Einheitensystem formuliert werden. Rechnen Sie die Materialkonstanten
   a) Elastizitätsmodul $E = 210\,\mathrm{GPa}$
   b) Dichte $\rho = 8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
   in eine Form um, die nur die Einheiten kg, s und mm verwendet!
   Hinweis: $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2},\ 1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$

6. Es seien folgende Mengen gegeben:
   $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - \mathrm{i}| \leq 4\}$,
   $B = \{z \in \mathbb{C} \mid \ \mathrm{Re}(z) \leq 2,\ \mathrm{Im}(z) \geq 2\,\mathrm{Re}(z)\}$.
   Stellen Sie A, B, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$ und $B \backslash A$ grafisch dar!

7. Bestimmen Sie die algebraische und die trigonometrische Darstellung von $\dfrac{(6+2\sqrt{3}\,\mathrm{i})^4}{(-2+2\mathrm{i})^6}$!
   Hinweis: Benutzen Sie die exponentielle Darstellung der Zahlen in Zähler und Nenner!

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Zulassungsvoraussetzung für die Prüfungsleistung zu Höhere Mathematik I.1 ist gemäß Studienordnung das Bestehen von 4 der 5 Aufgabenkomplexe. Bitte beachten Sie, dass es im laufenden Semester keine Möglichkeit gibt, Aufgabenkomplexe nachträglich zu bestehen.

Arbeiten Sie sich (z.B. mithilfe der folgenden Einführung) in das Computernumeriksystem `MATLAB` ein und lösen Sie damit dann die folgenden Aufgaben. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer `diary`-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Berechnen Sie $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sqrt[5]{32}$ (also $2^{\frac{1}{5}}$) und $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ (also $\exp(\mathrm{i}\,\pi)$).
2. Plotten Sie die Funktion $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x - 1$ im Intervall $[-2\,,\,3]$. Geben Sie dem Plot einen Titel und beschriften Sie auch die Achsen entsprechend.
3. Bestimmen Sie unter Verwendung des Befehls `roots` (siehe $\gg$ `help roots`) die Nullstellen des Polynoms $f(x) = -3x^3 + 4x^2 + 3x - 1$. Plotten Sie die Nullstellen in das gleiche Fenster wie $f(x)$. Verwenden Sie dabei sichtbare Marker.
   Hinweis: $\gg$ `roots([1,-2,-3])` bestimmt die Nullstellen von $f(x) = x^2 - 2x - 3$.
4. Es sei $z_1 := 3 - 2\mathrm{i}$ und $z_2 := -1 + \mathrm{i}$. Berechnen Sie $z_1 + z_2$, $z_1 * z_2$, $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$, $\mathrm{Im}(z_1 + z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1 * z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1) * \mathrm{Im}(z_2)$, $|z_1| * |z_2|$, $|z_1 * z_2|$.

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit $\gg$ `diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und eventuell angefertigte Plots möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Einführung in `MATLAB`

Das System `MATLAB` wird vom URZ bereitgestellt. Sämtliche Beispiele dieser Einführung mit Ausnahme des Befehls `ezplot` funktionieren genauso mit der freien Software `Octave`. Für diese gibt es z.B. auch die Windows-Downloadversion octave-3.0.1-vs2008-setup.exe.

Starten Sie `MATLAB` und geben Sie die folgenden Befehle ein. Beobachten Sie sorgfältig die Bildschirmausgabe und achten Sie auf die Bedeutung von , und ;.

Tipp: mit den Cursortasten $\boxed{\uparrow}$ $\boxed{\downarrow}$ kann man die vorherigen Eingabezeilen „zurückholen“ und ändern.

```
≫ 23+19
≫ 3*4
≫ 3*4,
≫ 3*4;
≫ a=3*4;
≫ a
≫ a;
≫ sqrt(2)
≫ help sqrt
≫ pi
≫ help pi
≫ radius=2, durchmesser=2*radius, umfang=durchmesser*pi
≫ radius=2, durchmesser=2*radius; umfang=durchmesser*pi
≫ radius=2, durchmesser=2*radius umfang=durchmesser*pi
```

Mit dem Befehl

```
≫ pwd
```

(`pwd` steht für „**p**rint **w**orking **d**irectory“) können Sie sich Ihr aktuelles Arbeitsverzeichnis anzeigen lassen. Es empfiehlt sich, für jeden Hausaufgabenkomplex ein eigenes Verzeichnis anzulegen. Dies kann beispielsweise durch die folgenden beiden Befehle realisiert werden:

```
≫ mkdir Hausaufgabenkomplex1
≫ cd Hausaufgabenkomplex1
≫ pwd
```

Geben Sie nun die folgenden Befehle ein:

```
≫ help diary
≫ diary ha1.txt
```

Alle ab jetzt eingegebenen Befehle werden mitsamt ihrer Ausgabe in die Datei `ha1.txt` im aktuellen Arbeitsverzeichnis geschrieben. Dies eignet sich besonders, um Ihre Lösung der Hausaufgabe zu dokumentieren.

Ein Plot der Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ auf dem Intervall $[-1\,,\,2]$ kann wie folgt angefertigt werden. Beobachten Sie den Einfluss des Parameters n.

```
≫ n=5
≫ help linspace
≫ x=linspace(-1,2,n)
≫ F=x.^3-2*x.^2+1
```

Die komponentenweise Ausführung von Operationen für Vektoren, wie sie z.B. hier zur Berechnung von Werten einer Funktion an mehreren Stellen benötigt wird, wird in MATLAB durch einen Punkt vor dem Operationszeichen veranlasst. $[3\ 7].*[5\ 8]$ ergibt also z.B. $[15\ 56]$. Dabei handelt es sich um keine der bekannten Produktbildungen aus der Vektorrechnung.

```
≫ plot(x,F);
≫ title('Plot von f(x)=x^3-2*x^2+1 mit n=5');
≫ xlabel('x'); ylabel('f(x)'); grid on;
≫ n=100
≫ x=linspace(-1,2,n)
≫ F=x.^3-2*x.^2+1
≫ help hold
≫ hold on
≫ plot(x,F,'o-r');
≫ title('Plot von f(x)=x^3-2*x^2+1 mit n=5 und n=100');
≫ print -dpng ha1.png
≫ print -depsc ha1.eps
```

Im Gegensatz zu der verpixelten png-Grafik wurde mit dem letzten Befehl eine Vektorgrafik erzeugt. Allerdings wird für deren Anzeige ein Postscript-Interpreter (z.B. Ghostscript) benötigt. Dieser ist auf den URZ-Rechnern installiert.

```
≫ hold off
≫ plot(x,F,'-.k');
≫ clf
```

Einfache Plots lassen sich auch mit der Funktion `ezplot` (sprich: „easy plot“) erstellen:

```
≫ help ezplot
≫ ezplot('x.^3-2*x.^2+1',[-1,2])
```

Auch Mengen von Punkten können geplottet werden:

```
≫ px=[-0.5 1.5]
≫ py=[2 -1]
≫ plot(px,py,'rx','MarkerSize',9,'LineWidth',2)
```

Dabei bewirkt `'rx'` den Einsatz eines roten x-förmigen Markers.

Summen lassen sich leicht berechnen:

```
≫ x=[-2, 2, 3, 1, 0, 4]
≫ sum(x)
≫ x+2
≫ sum(x+2)
```

Die folgenden Befehlen müssen nicht vollständig verstanden werden, sie sollen lediglich aufzeigen, dass mit wenig Aufwand komplizierte Funktionen in eine ansprechende Darstellung gebracht werden können.

```
≫ x=-8:0.5:8; y=x;
≫ [X,Y]=meshgrid(x,y);
≫ R=sqrt(X.^2+Y.^2)+eps;
≫ Z=sin(R)./R;
≫ mesh(Z);
≫ title('Mesh-Plot von sin(sqrt(x^2+y^2))/sqrt(x^2+y^2)')
≫ surf(Z);
≫ title('Surf-Plot von sin(sqrt(x^2+y^2))/sqrt(x^2+y^2)')
```

Um das Protokollieren in die Datei `ha1.txt` zu beenden, verwenden Sie den folgenden Befehl.

≫ `diary off`

Schauen Sie sich den Inhalt der Datei `ha1.txt` an, um die Funktionsweise des `diary`-Befehls genau zu verstehen.

Komplexe Zahlen

Sie können mit komplexen Zahlen wie mit normalen Zahlen rechnen. Um z.B. die Summe von $2+\mathrm{i}$ und $1-4\mathrm{i}$ zu berechnen, genügt es,

≫ `(2+i)+(1-4i)`

einzugeben. Komplexe Zahlen können auch in Variablen gespeichert werden. Der Realteil einer komplexen Zahl kann mit der Funktion `real` bestimmt werden. Beispiel:

≫ `z=1-4i`
≫ `real(z)`

Darüberhinaus stehen weitere Befehle zum Rechnen mit komplexen Zahlen zur Verfügung.

≫ `help real`
≫ `help imag`
≫ `help conj`
≫ `help abs`