

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Ableitung

Letzter Abgabetermin: 21. April 2009

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Sei $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}} + 3$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen. Bestimmen Sie ihren Definitionsbereich, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!
2. Bestimmen Sie mittels Lagrange-Interpolation das Polynom vierten Grades, welches an der Stelle 0 den Wert 4, an den Stellen +1 und -1 den Wert 12 und an den Stellen +2 und -2 den Wert 24 annimmt!
3. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^7 + 4x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{bx^7 + 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$ in Abhängigkeit von den reellen Parametern a und b !
4. Berechnen Sie ohne Verwendung der l'Hospitalischen Regel die Grenzwerte
a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 9x + 20}$ und b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 5x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$!
5. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:
a) $f(x) = (4x + 3 \cos^2 x)^5$, b) $f(x) = 6^x x^6 \sin x$, c) $f(x) = \ln \sqrt{e^x + x^4}$, d) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{4x^2+5}}$!
6. § 32a Absatz 1 des Einkommensteuergesetzes bestimmt den Einkommensteuertarif wie folgt:
Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen
 1. bis 7.664 Euro (Grundfreibetrag): 0;
 2. von 7.665 Euro bis 12.739 Euro: $(883,74 * y + 1.500) * y$;
 3. von 12.740 Euro bis 52.151 Euro: $(228,74 * z + 2.397) * z + 989$;
 4. von 52.152 Euro bis 250.000 Euro: $0,42 * x - 7.914$;
 5. von 250.001 Euro an: $0,45 * x - 15.414$.

„y“ ist ein Zehntausendstel des 7.664 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 12.739 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Sei t das ungerundete zu versteuernde Einkommen (in Folgendem Einkommen) und $S(t)$ die tarifliche Einkommensteuer dafür jeweils in Euro.

 - a) Wie hoch muss das Einkommen mindestens sein, damit wenigstens 1 € Einkommensteuer entsteht?
 - b) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow 12740-} S(t)$ und $\lim_{t \rightarrow 12740+} S(t)$!

- c) Stellen Sie die Funktion $S(t)$ in den oben mit 4. und 5. bezeichneten Bereichen mithilfe der Gaußklammer dar!
- d) Untersuchen Sie $S(t)$ an den Stellen $t = 250000$ und $t = 250001$ auf Stetigkeit!

Um differenzieren zu können, soll im Weiteren von den Rundungsvorschriften abgesehen werden.

- e) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom Einkommen und stellen Sie diesen grafisch dar!
- f) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 10000 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen, den Grenzsteuersatz sowie die Steuerverminderung, die durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € erreicht wird!
- g) Für welche Einkommen kann durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € die tarifliche Einkommensteuer um ca. 15 €, ca. 30 €, ca 42 € bzw. ca. 45 € vermindert werden?

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

- Lösen Sie die Interpolationsaufgabe aus Aufgabe 2 dieser Hausaufgabe, indem Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten aufstellen und lösen (vgl. Übung 1, Aufgabe 3 und WS 2008/09, Hausaufgabe 4, MATLABaufgabe 2). Zeichnen Sie die gegebenen Punkte und das berechnete Interpolationspolynom in einen gemeinsamen Plot.
- Erstellen Sie ein `m-File` für die Funktion $f(x) = \ln(x+1) \sin(x^2)$. Bestimmen Sie (analytisch) die Ableitung der Funktion und erstellen Sie für diese ein weiteres `m-File`.
Hinweis: Die Funktion `log` ist in MATLAB der natürliche Logarithmus.
 - Plotten Sie die Funktion f im Intervall $[-0.5, 5]$ und zeichnen Sie an den Stellen $x_1 = 1.4$ und $x_2 = 3.75$ die Tangente an den Graphen der Funktion ein.
- Manchmal ist es zu aufwendig, für eine komplizierte Funktion eine analytische Ableitung anzugeben. In diesem Fall kann man die Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 durch den Differenzenquotienten

$$f'_{\text{approx}}(x_0; h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

für einen geeigneten (kleinen) Wert von h annähern, denn die Ableitung ist ja der Grenzwert dieser Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Es soll untersucht werden, wie gut die Annäherung $f'_{\text{approx}}(x_0; h)$ in Abhängigkeit von h ist. Dafür soll die Funktion f aus Aufgabe 2 an der Stelle $x_0 = 1,85$ verwendet werden.

Berechnen Sie zunächst die exakte Ableitung $f'(x_0)$ und vergleichen Sie diese mit der Näherung $f'_{\text{approx}}(x_0; h)$ für $h = 0.1$, $h = 0.001$, $h = 10^{-5}$, $h = 10^{-7}$, $h = 10^{-9}$ und $h = 10^{-11}$, indem Sie jeweils die Differenz $f'_{\text{approx}}(x_0; h) - f'(x_0)$ angeben.

Zeichnen Sie nun den Fehler der Annäherung, d.h. $|f'_{\text{approx}}(x_0; h) - f'(x_0)|$ in Abhängigkeit von h im Intervall $(0, 10^{-6}]$. Was können Sie beobachten?

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und die angefertigten Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur MATLABaufgabe

m-Files

In MATLAB können Funktionen in extra Dateien (m-Files) ausgelagert werden. Als Beispiel könnte die Datei `quadriere.m` dienen. Sie besteht aus den zwei Zeilen

```
function y=quadriere(x)
y=x^2;
```

Für Funktionen haben m-Files eine spezielle Struktur. Zunächst wird in der ersten Zeile mit dem Schlüsselwort `function` festgelegt, dass es sich um eine Funktion handelt. Daran schließt sich der Name des Rückgabeparameters (hier `y`), der Funktionsname (hier `quadriere`) und die Eingabeargumente (hier `x`) an. In den folgenden Zeilen können nahezu beliebige MATLAB-Befehle stehen. Zurückgegeben wird der Wert, welcher nach Abarbeitung aller Befehle in der Variable `y` steht.

Aufrufen können Sie diese Funktion aus MATLAB mit

```
>> quadriere(4)
>> f=quadriere(5)
>> y=quadriere(6)
```

Um sich später Arbeit zu sparen, empfiehlt es sich, die erstellten m-Files zu „vektorisieren“. Dazu müsste man hier die zweite Zeile in

```
y=x.^2;
```

ändern. Jetzt kann der Funktion auch ein Vektor übergeben werden:

```
>> quadriere([1, 2, 3, 4, 5])
```

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Ableitung

Letzter Abgabetermin: 21. April 2009

1. Sei $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}} + 3$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen. Bestimmen Sie ihren Definitionsbereich, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!

Lösung:

Damit beide Wurzeln existieren, müssen beide Radikanden nichtnegativ sein. Das ist für $x \geq -2$ erfüllt. Da für $x \geq -2$ der Nenner nicht gleich 0 werden kann, gilt $\text{DB}(f) = [-2, \infty)$.

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}} + 3 \iff \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}} = y - 3$$

Da die linke Seite nicht negativ werden kann, muss $y \geq 3$ sein. Unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung äquivalent zu

$$\frac{x+2}{x+4} = (y-3)^2 \iff (x+2) = (y-3)^2(x+4) \iff x(1-(y-3)^2) = 4(y-3)^2 - 2 \iff x(-y^2+6y-8) = 4y^2-24y+34 \iff -x(y-2)(y-4) = 4y^2-24y+34$$

Wie bereits festgestellt, muss $y \geq 3$ sein. Der Fall $y = 4$ scheidet aus, da sich dann in der zuletzt notierten Ungleichung $0 = 2$ ergeben würde. Ansonsten gilt $x = \frac{4y^2-24y+34}{-y^2+6y-8} = -\frac{4y^2-24y+34}{(y-2)(y-4)}$.

Nun muss noch $x \geq -2$ gewährleistet werden. Hierzu wird eine Fallunterscheidung vorgenommen:

$y < 4$: $x \geq -2 \iff 4y^2-24y+34 \geq 2y^2-12y+16 \iff 2y^2-12y+18 = 2(y^2-6y+9) = 2(y-3)^2 \geq 0$
 Letzteres ist immer erfüllt, so dass alle y aus diesem Fall zulässig sind.

$y > 4$: $x \geq -2 \iff 4y^2-24y+34 \leq 2y^2-12y+16 \iff 2y^2-12y+18 = 2(y^2-6y+9) = 2(y-3)^2 \leq 0$
 Letzteres ist nur möglich für $y = 3$, das gehört aber gar nicht zu diesem Fall.

Zu jedem y aus $3 \leq y < 4$ lässt sich also eindeutig $x = \frac{4y^2-24y+34}{-y^2+6y-8} \geq -2$ errechnen, d.h., derselbe Funktionswert $y = f(x)$ kann nicht zu verschiedenen Argumenten gehören, die für $x \geq -2$ definierte Funktion $f(x)$ ist eineindeutig und besitzt damit eine Umkehrfunktion.

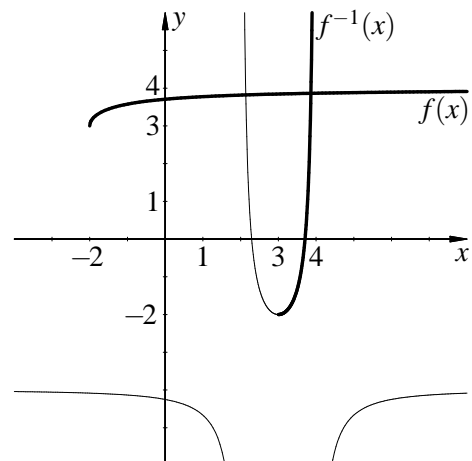
Formales Vertauschen der Variablen führt auf

$$f^{-1}(x) = \frac{4x^2-24x+34}{-x^2+6x-8} \quad \text{mit}$$

$$\text{DB}(f^{-1}) = [3, 4) = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 4\} = \text{WB}(f),$$

$$\text{WB}(f^{-1}) = [-2, \infty) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq -2\} = \text{DB}(f).$$

(Bei den in der Abbildung schwach gezeichneten Kurven handelt es sich um die Fortsetzung von $g(x) = \frac{4x^2-24x+34}{-x^2+6x-8}$ außerhalb des Definitionsbereichs von $f^{-1}(x)$, also um keinen Bestandteil der Umkehrfunktion.)



2. Bestimmen Sie mittels Lagrange-Interpolation das Polynom vierten Grades, welches an der Stelle 0 den Wert 4, an den Stellen +1 und -1 den Wert 12 und an den Stellen +2 und -2 den Wert 24 annimmt!

Lösung:

$$\begin{aligned} p_4(x) &= 4 \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2)} + 12 \frac{(x+2)(x+1)x(x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)} + 12 \frac{(x+2)x(x-1)(x-2)}{1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} \\ &\quad + 24 \frac{(x+2)(x+1)x(x-1)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 24 \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)} \\ &= 4 \frac{(x^2-4)(x^2-1)}{4} + 12 \frac{(x+2)x(x-2)}{-6} (x+1+x-1) + 24 \frac{(x+1)x(x-1)}{24} (x+2+x-2) \\ &= (x^2-4)(x^2-1) - 4(x^2-4)x^2 + 2(x^2-1)x^2 = x^4 - 5x^2 + 4 - 4x^4 + 16x^2 + 2x^4 - 2x^2 \\ &= \underline{\underline{-x^4 + 9x^2 + 4}} \end{aligned}$$

oder

Aus Symmetriegründen ist das gesuchte Polynom eine gerade Funktion und enthält deshalb nur gerade Potenzen. Deshalb kann es als quadratisches Polynom von x^2 bestimmt werden:

$$\begin{aligned} p_4(x) = p_2(x^2) &= 4 \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(0-1)(0-4)} + 12 \frac{(x^2-0)(x^2-4)}{(1-0)(1-4)} + 24 \frac{(x^2-0)(x^2-1)}{(4-0)(4-1)} \\ &= (x^2-1)(x^2-4) - 4x^2(x^2-4) + 2x^2(x^2-1) = \underline{\underline{-x^4 + 9x^2 + 4}} \end{aligned}$$

3. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^7 + 4x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{bx^7 + 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$ in Abhängigkeit von den reellen Parametern a und b !

Lösung:

$$\begin{aligned} \underline{a, b \neq 0}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^7 + 4x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{bx^7 + 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 \left(a + \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^5} - \frac{2}{x^6} + \frac{1}{x^7} \right)}{x^7 \left(b + \frac{7}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{4}{x^4} + \frac{3}{x^5} + \frac{2}{x^6} + \frac{1}{x^7} \right)} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$\underline{a \neq 0, b = 0}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^7 + 4x^6 \mp \dots}{7x^6 + 6x^5 + \dots} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 \left(a + \frac{4}{x} \mp \dots \right)}{x^6 \left(7 + \frac{6}{x} + \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(a + \frac{4}{x} \mp \dots \right)}{7 + \frac{6}{x} + \dots} = \begin{cases} \infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\underline{a = 0, b \neq 0}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 4x^5 \pm \dots}{bx^7 + 7x^6 + \dots} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 \left(4 - \frac{4}{x} \pm \dots \right)}{x^7 \left(b + \frac{7}{x} + \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4}{x} \pm \dots}{x \left(b + \frac{7}{x} + \dots \right)} = 0$$

$$\underline{a, b = 0}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 4x^5 \pm \dots}{7x^6 + 6x^5 + \dots} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 \left(4 - \frac{4}{x} \pm \dots \right)}{x^6 \left(7 + \frac{6}{x} + \dots \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{4}{x} \pm \dots}{7 + \frac{6}{x} + \dots} = \frac{4}{7}$$

(Der Fall $a=0, b \neq 0$ kann auch zusammen mit dem Fall $a, b \neq 0$ behandelt werden, das Ergebnis a/b ist auch in diesem Falle richtig.)

4. Berechnen Sie ohne Verwendung der l'Hospitalschen Regel die Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 9x + 20}$ und b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 5x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} \right)$!

Lösung:

- a) Für $x \rightarrow -4$ gehen Zähler und Nenner gegen 0, unbestimmter Ausdruck.

$$x^2 + 3x - 4 = 0: x_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{16}{4}} = \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}, \quad x^2 + 9x + 20 = 0: x_{1/2} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{80}{4}} = \begin{cases} -5 \\ -4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 9x + 20} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+5)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x+5} = \frac{-5}{1} = \underline{\underline{-5}}$$

b) Für $x \rightarrow -1$ gehen Minuend und Subtrahend gegen $\pm\infty$, unbestimmter Ausdruck.

Da für $x = -1$ Nullstelle von $x^3 - x^2 - x + 1$ ist, enthält der Nenner $x^3 - x^2 - x + 1$ den Faktor $x+3$.

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - x + 1) : (x + 1) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -2x^2 - x + 1 \\ \underline{-2x^2 - 2x} \\ x + 1 \\ \underline{x + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 5x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} - \frac{1}{x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 5x - 2}{(x+1)(x^2 - 2x + 1)} - \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 5x - 2) - (x^2 - 2x + 1)}{(x+1)(x^2 - 2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x - 3}{(x+1)(x^2 - 2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x+1)}{(x+1)(x^2 - 2x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3}{x^2 - 2x + 1} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

5. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:

a) $f(x) = (4x + 3 \cos^2 x)^5$, b) $f(x) = 6^x x^6 \sin x$, c) $f(x) = \ln \sqrt{e^x + x^4}$, d) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{4x^2+5}}$!

Lösung:

a) $f'(x) = 5(4x + 3 \cos^2 x)^4 (4 + 6 \cos x (-\sin x)) = 5(4x + 3 \cos^2 x)^4 (4 - 6 \sin x \cos x)$

b) $f'(x) = (6^x x^6)' \sin x + 6^x x^6 (\sin x)' = 6^x \ln 6 x^6 \sin x + 6^x 6x^5 \sin x + 6^x x^6 \cos x$
 $= 6^x x^5 ((6+x \ln 6) \sin x + x \cos x)$

c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + x^4}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{e^x + x^4}} (e^x + 4x^3) = \frac{e^x + 4x^3}{2(e^x + x^4)}$

d) $f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4x^2+5}{2x-3}} \frac{2(4x^2+5) - (2x-3)8x}{(4x^2+5)^2} = \frac{-8x^2+24x+10}{2\sqrt{2x-3}(4x^2+5)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4x^2+12x+5}{\sqrt{2x-3}\sqrt{4x^2+5}(4x^2+5)}$

6. § 32a Absatz 1 des Einkommensteuergesetzes bestimmt den Einkommensteuertarif wie folgt:
Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen

1. bis 7.664 Euro (Grundfreibetrag): 0;

2. von 7.665 Euro bis 12.739 Euro: $(883,74 * y + 1.500) * y$;

3. von 12.740 Euro bis 52.151 Euro: $(228,74 * z + 2.397) * z + 989$;

4. von 52.152 Euro bis 250.000 Euro: $0,42 * x - 7.914$;

5. von 250.001 Euro an: $0,45 * x - 15.414$.

„y“ ist ein Zehntausendstel des 7.664 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 12.739

Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu steuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Sei t das ungerundete zu steuernde Einkommen (in Folgendem Einkommen) und $S(t)$ die tarifliche Einkommensteuer dafür jeweils in Euro.

- Wie hoch muss das Einkommen mindestens sein, damit wenigstens 1 € Einkommensteuer entsteht?
- Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow 12740^-} S(t)$ und $\lim_{t \rightarrow 12740^+} S(t)$!
- Stellen Sie die Funktion $S(t)$ in den oben mit 4. und 5. bezeichneten Bereichen mithilfe der Gaußklammer dar!
- Untersuchen Sie $S(t)$ an den Stellen $t = 250000$ und $t = 250001$ auf Stetigkeit!

Um differenzieren zu können, soll im Weiteren von den Rundungsvorschriften abgesehen werden.

- Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom Einkommen und stellen Sie diesen grafisch dar!
- Ermitteln Sie für ein Einkommen von 10000 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen, den Grenzsteuersatz sowie die Steuerverminderung, die durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € erreicht wird!
- Für welche Einkommen kann durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € die tarifliche Einkommensteuer um ca. 15 €, ca. 30 €, ca 42 € bzw. ca. 45 € vermindert werden?

Lösung:

$$a) 883.74y^2 + 1500y \geq 1, \quad y^2 + \frac{1500}{883.74}y - \frac{1}{883.74} \geq 0$$

$$y_{1/2} = -\frac{750}{883.74} \pm \sqrt{\left(\frac{750}{883.74}\right)^2 + \frac{1}{883.74}} \approx \begin{cases} -1.6979982 \\ 0.0006664 \end{cases}$$

Da negative y nicht in Frage kommen, muss $y \gtrsim 0.0006664$ und damit $x \gtrsim 10000 \cdot 0.0006664 + 76664 = 7670.664$, wegen seiner Ganzzahligkeit also mindestens 7671 sein.

Damit überhaupt Einkommensteuer zu zahlen ist, muss das Einkommen mindestens 7671 € betragen.

- Da das Einkommen auf volle Euro-Beträge abzurunden ist, gilt $\lim_{t \rightarrow 12740^-} S(t) = S(12739)$ und $\lim_{t \rightarrow 12740^+} S(t) = S(12740)$.

$$x = 12739: y = 0.5075, S = \lfloor 988.86 \rfloor = 988, \quad x = 12740: z = 0.0001, S = \lfloor 989.24 \rfloor = 989$$

Also ist für $t = 12740$ der linksseitige Grenzwert von $S(t)$ gleich 988 und der rechtsseitige Grenzwert 989.

$$c) \text{ In den betrachteten Bereichen gilt } S(t) = \begin{cases} \lfloor 0.42[t] - 7914 \rfloor, & 52152 \leq t < 250001 \\ \lfloor 0.45[t] - 15414 \rfloor, & 250001 \leq t \end{cases}$$

- $\lim_{t \rightarrow 250000^-} S(t) = S(249999) = \lfloor 97085.58 \rfloor = 97085$,
 $\lim_{t \rightarrow 250000^+} S(t) = S(250000) = \lfloor 97086.00 \rfloor = 97086$,
 also ist $S(t)$ an der Stelle $t = 250000$ unstetig.

$$\lim_{t \rightarrow 250001^-} S(t) = S(250000) = \lfloor 97086.00 \rfloor = 97086,$$

$$\lim_{t \rightarrow 250001^+} S(t) = S(250001) = \lfloor 97086.45 \rfloor = 97086.$$

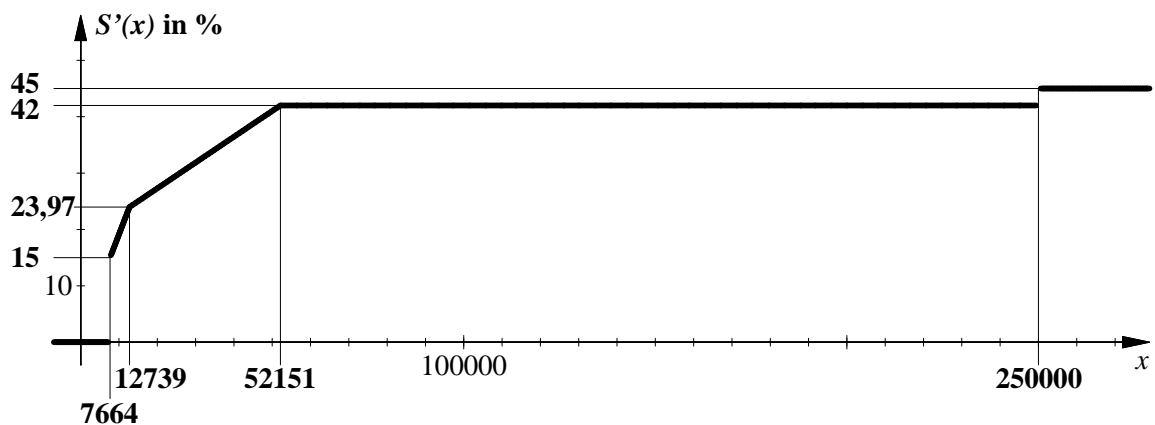
Da der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich und gleich dem Funktionswert an dieser Stelle sind, ist die Funktion $S(t)$ an der Stelle $t = 250001$ stetig.

Wie in der Aufgabenstellung angegeben, wird im Folgenden von den Rundungsvorschriften abgesehen.

e) Ist $S(x)$ die auf das Einkommen x zu entrichtende Steuer, so ist $\frac{S(x)}{x}$ der Durchschnittssteuersatz und $S'(x)$ der Grenzsteuersatz (d.h. die auf den letzten eingekommenen Euro zu entrichtende Steuer).

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 7664 \\ (883.74 \cdot y + 1500) \cdot y, & y = \frac{x-7664}{10000}, \quad 7665 \leq x \leq 12739 \\ (228.74 \cdot z + 2397) \cdot z + 989, & z = \frac{x-12739}{10000}, \quad 12740 \leq x \leq 52151 \\ 0.42 \cdot x - 7914, & 52152 \leq x \leq 250000 \\ 0.45 \cdot x - 15414, & 250001 \leq x \end{cases}$$

$$S'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 7664 \\ \frac{1767.48 \cdot y + 1500}{10000} = \frac{1767.48 \cdot \frac{x-7664}{10000} + 1500}{10000}, & 7665 \leq x \leq 12739 \\ \frac{457.48 \cdot z + 2397}{10000} = \frac{457.48 \cdot \frac{x-12739}{10000} + 2397}{10000}, & 12740 \leq x \leq 52151 \\ 0.42, & 52152 \leq x \leq 250000 \\ 0.45, & 250001 \leq x \end{cases}$$



Also beträgt der Eingangssteuersatz 15 % und der Spitzensteuersatz 45 %.

f) $x = 10000$, $y = 0.2336$, zu entrichtende Steuer: $S(10000) = 398.62$,

Anteil am Einkommen (Durchschnittssteuersatz): $\frac{S(10000)}{10000} = 3.99\%$,

Grenzsteuersatz: $S'(10000) = 19.13\%$

Eine Verminderung des zu versteuernden Einkommens um 100 € führt folglich zu einer Verminderung der tariflichen Einkommensteuer um ca. $0.1913 \cdot 100 \text{ €} = 19.13 \text{ €}$. Tatsächlich ist $S(9900) = 379.58$, so dass die Steuerverminderung exakt 19.04 € beträgt.

Die Rundungsregeln des § 32a Abs. 1 EStG sind dabei nicht berücksichtigt.

- g) Es muss ermittelt werden, für welche Einkommen die Grenzsteuersätze 15, 30, 42 bzw. 45 % betragen.

15 % ist gerade der Eingangssteuersatz. Wegen des Sprungs des Grenzsteuersatzes an dieser Stelle muss das Einkommen 100 € über dem Grundfreibetrag liegen, da eine Verminderung um 100 € sonst unter den Grundfreibetrag führt. (Nur wer mindestens 15 € Steuern zahlt, kann diese einsparen.) Die Einsparung von 15 € wird also bei einem Einkommen in Höhe von 7764 € erzielt. Tatsächlich gilt $S(7764) - S(7664) = 15.09 - 0 = 15.09$.

Wie die Abbildung bei b) zeigt, wird ein Grenzsteuersatz von 30 % in dem im Einkommensteuergesetz mit 3. bezeichneten Bereich erreicht, also muss gelten

$$\frac{457.48 \cdot z + 2397}{10000} = 0.3, \quad z = \frac{3000 - 2397}{457.48} = 1.31809, \quad x = 10000z + 12739 = 25919.90.$$

Eine Steuerverminderung um 30 € wird also bei einem Einkommen von ca. 25920 € erreicht. Tatsächlich gilt $S(25920) - S(25820) = 4545.90 - 4515.92 = 29.98$.

Der Grenzsteuersatz von 42 % gilt für alle Einkommen von 52 152 bis 250 000 €, so dass für diese durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € eine Steuerverminderung von 42 € erzielt wird. Exakt gilt das für Einkommen von 52 252 bis 250 000 €, denn dann liegen sowohl das ungeminderte als auch das geminderte Einkommen im im Einkommensteuergesetz mit 4. bezeichneten Bereich und es ist $S(x) - S(x-100) = (0.42x - 7914) - (0.42(x-100) - 7914) = 0.42 \cdot 100 = 42$.

Der Grenzsteuersatz von 45 % gilt für alle Einkommen von 250 000 € an, so dass für diese durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € eine Steuerverminderung von 45 € erzielt wird. Exakt gilt das für Einkommen ab 250 100 €, denn dann liegen sowohl das ungeminderte als auch das geminderte Einkommen im im Einkommensteuergesetz mit 4. bezeichneten Bereich und es ist $S(x) - S(x-100) = (0.45x - 15414) - (0.45(x-100) - 15414) = 0.45 \cdot 100 = 45$.

Zusatzaufgabe

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Lösen Sie die Interpolationsaufgabe aus Aufgabe 2 dieser Hausaufgabe, indem Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten aufstellen und lösen (vgl. Übung 1, Aufgabe 3 und WS 2008/09, Hausaufgabe 4, MATLABaufgabe 2). Zeichnen Sie die gegebenen Punkte und das berechnete Interpolationspolynom in einen gemeinsamen Plot.
2. a) Erstellen Sie ein m-File für die Funktion $f(x) = \ln(x+1) \sin(x^2)$. Bestimmen Sie (analytisch) die Ableitung der Funktion und erstellen Sie für diese ein weiteres m-File.
Hinweis: Die Funktion `log` ist in MATLAB der natürliche Logarithmus.
 b) Plotten Sie die Funktion f im Intervall $[-0.5, 5]$ und zeichnen Sie an den Stellen $x_1 = 1.4$ und $x_2 = 3.75$ die Tangente an den Graphen der Funktion ein.
3. Manchmal ist es zu aufwendig, für eine komplizierte Funktion eine analytische Ableitung anzugeben. In diesem Fall kann man die Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 durch den Differenzenquotienten

$$f'_{\text{approx}}(x_0; h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

für einen geeigneten (kleinen) Wert von h annähern, denn die Ableitung ist ja der Grenzwert dieser Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Es soll untersucht werden, wie gut die Annäherung $f'_{\text{approx}}(x_0; h)$ in Abhängigkeit von h ist. Dafür soll die Funktion f aus Aufgabe 2 an der Stelle $x_0 = 1,85$ verwendet werden. Berechnen Sie zunächst die exakte Ableitung $f'(x_0)$ und vergleichen Sie diese mit der Näherung $f'_{\text{approx}}(x_0; h)$ für $h = 0.1$, $h = 0.001$, $h = 10^{-5}$, $h = 10^{-7}$, $h = 10^{-9}$ und $h = 10^{-11}$, indem Sie jeweils die Differenz $f'_{\text{approx}}(x_0; h) - f'(x_0)$ angeben.

Zeichnen Sie nun den Fehler der Annäherung, d.h. $|f'_{\text{approx}}(x_0; h) - f'(x_0)|$ in Abhängigkeit von h im Intervall $(0, 10^{-6}]$. Was können Sie beobachten?

Öffnen Sie die erstellte diary-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete diary-Datei und die angefertigten Plots und m-Files möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Lösung:

nachbereitete diary-Datei (Kommentare durch `%` gekennzeichnet) und Plots auf den nächsten Seiten

```

-----
% Aufgabe 1
-----

x=[0, -1, 1, -2, 2]'
x =
     0
    -1
     1
    -2
     2

% Systemmatrix aufstellen
M=[x.^4, x.^3, x.^2, x.^1, x.^0]
M =
     0     0     0     0     1
     1    -1     1    -1     1
     1     1     1     1     1
    16    -8     4    -2     1
    16     8     4     2     1

% Rechte Seite aufstellen (vorgegebene Werte)
y=[4, 12, 12, 24, 24]'
y =
     4
    12
    12
    24
    24

% System lösen
a=M\y
a =
    -1
     0
     9
     0
     4

% Zeichne Polynom im Intervall [-3, 3]
z=linspace(-3,3,100);
% Polynom auswerten
p=a(1)*z.^4 + a(2)*z.^3 + a(3)*z.^2 + a(4)*z.^1 + a(5);
% Polynom plotten
figure;
plot(z,p,'b-');
hold on;
% y eintragen
plot(x,y,'rx','MarkerSize',10,'LineWidth',2);
xlabel('x'); ylabel('p(x)'); grid on;
title('Interpolationspolynome vom Grad vier');
legend('Polynom vom Grad vier','vorgegebene Werte','Location','North');
print -depsc HA01_matlab_plot_1.eps

```

```

-----
% Aufgabe 2
-----

% a) -----

% Listing des vorher erzeugten Files HA01_matlab_solution_f.m
type HA01_matlab_solution_f.m

function y=HA01_matlab_solution_f(x)
    y=log(x+1).*sin(x.^2);
-----

% Listing des vorher erzeugten Files HA01_matlab_solution_df.m
type HA01_matlab_solution_df.m

function y=HA01_matlab_solution_df(x)
    y = sin(x.^2)./(x+1) + 2*x.*log(x+1).*cos(x.^2);
-----

% b) -----

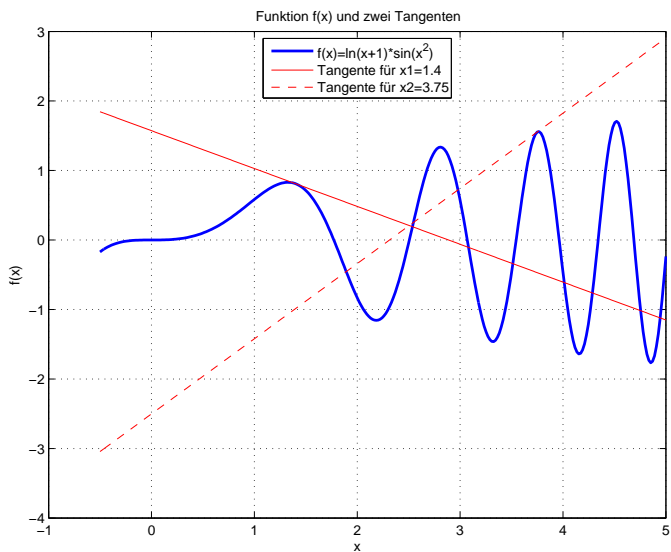
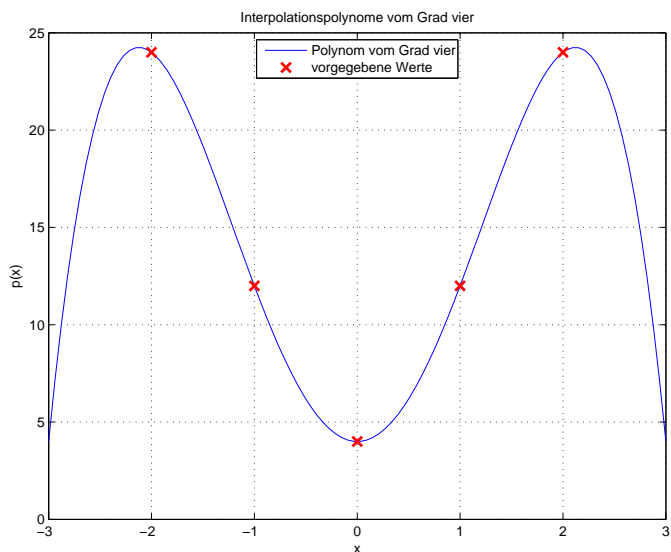
% Funktion f plotten
x=linspace(-0.5,5,300);
% Funktion auswerten und plotten
y=HA01_matlab_solution_f(x);
figure;
plot(x,y,'b-', 'LineWidth',2);
hold on;

% Zeichne Tangente im Punkt x1=1.4
x1=1.4;
fx1 = HA01_matlab_solution_f(x1);
dfx1 = HA01_matlab_solution_df(x1);
y = fx1 + dfx1*(x-x1);
plot(x,y,'r-');

% Zeichne Tangente im Punkt x2=3.75
x2=3.75;
fx2 = HA01_matlab_solution_f(x2);
dfx2 = HA01_matlab_solution_df(x2);
y = fx2 + dfx2*(x-x2);
plot(x,y,'r--');

xlabel('x'); ylabel('f(x)'); grid on;
title('Funktion f(x) und zwei Tangenten');
legend('f(x)=ln(x+1)*sin(x^2)', 'Tangente für x1=1.4',
        'Tangente für x2=3.75', 'Location', 'North');
print -depsc HA01_matlab_plot_2.eps

```



```

% -----
% Aufgabe 3
% -----

x0=1.85;
fx0=HA01_matlab_solution_f(x0);

% Exakter Wert der Ableitung an der Stelle x0
dfx0 = HA01_matlab_solution_df(x0);
fprintf('\n\nExakter Wert der Ableitung:%14.10f\n\n',dfx0)

Exakter Wert der Ableitung: -3.8204665882

% Annäherung für h=0.1
h=0.1; approx=(HA01_matlab_solution_f(x0+h)-fx0)/h; error=approx-dfx0;
fprintf('h=%8.1E: Näherung für Ableitung:%14.10f, Fehler:%12.3E\n',
        h,approx,error)
h=1.0E-001: Näherung für Ableitung: -3.7370246815, Fehler: 8.344E-002

% Annäherung für h=0.001
h=0.001; approx=(HA01_matlab_solution_f(x0+h)-fx0)/h; error=approx-dfx0;
fprintf('h=%8.1E: Näherung für Ableitung:%14.10f, Fehler:%12.3E\n',
        h,approx,error)
h=1.0E-003: Näherung für Ableitung: -3.8207056144, Fehler: -2.390E-004

% Annäherung für h=1e-5
h=1e-5; approx=(HA01_matlab_solution_f(x0+h)-fx0)/h; error=approx-dfx0;
fprintf('h=%8.1E: Näherung für Ableitung:%14.10f, Fehler:%12.3E\n',
        h,approx,error)
h=1.0E-005: Näherung für Ableitung: -3.8204690787, Fehler: -2.490E-006

% Annäherung für h=1e-7
h=1e-7; approx=(HA01_matlab_solution_f(x0+h)-fx0)/h; error=approx-dfx0;
fprintf('h=%8.1E: Näherung für Ableitung:%14.10f, Fehler:%12.3E\n',
        h,approx,error)
h=1.0E-007: Näherung für Ableitung: -3.8204666153, Fehler: -2.710E-008

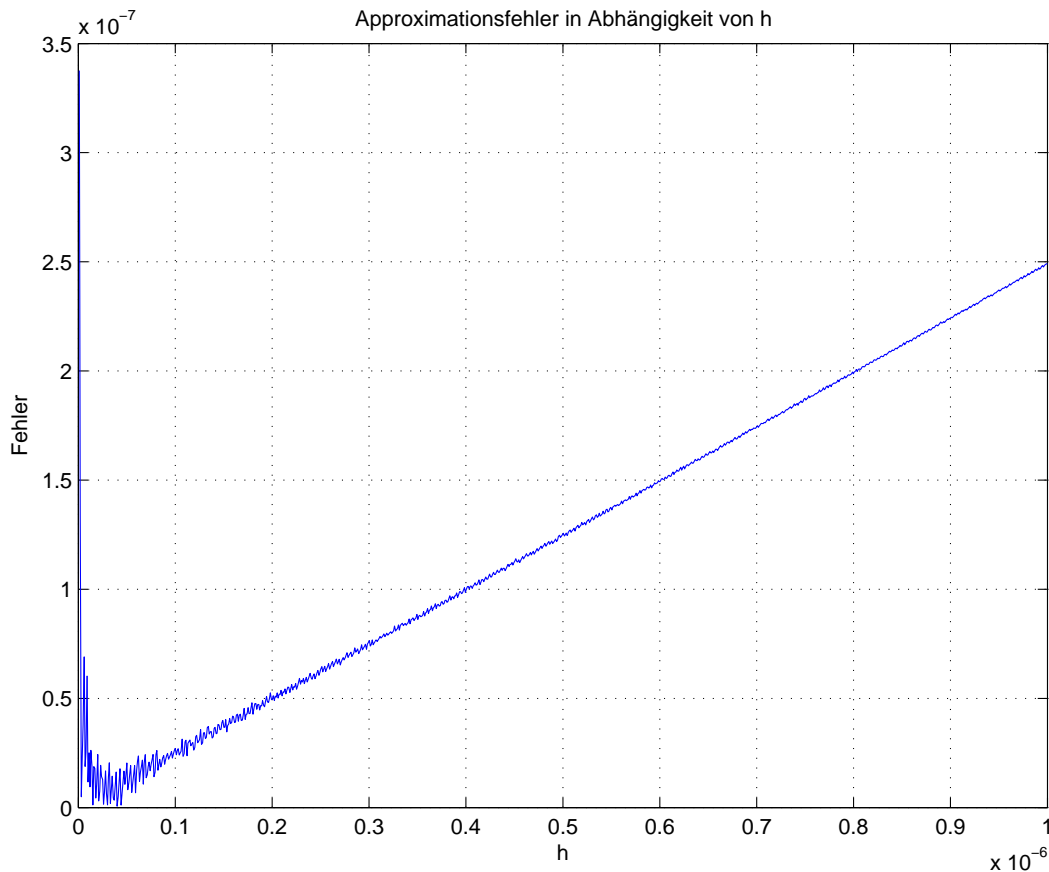
% Annäherung für h=1e-9
h=1e-9; approx=(HA01_matlab_solution_f(x0+h)-fx0)/h; error=approx-dfx0;
fprintf('h=%8.1E: Näherung für Ableitung:%14.10f, Fehler:%12.3E\n',
        h,approx,error)
h=1.0E-009: Näherung für Ableitung: -3.8204669428, Fehler: -3.546E-007

% Annäherung für h=1e-11
h=1e-11; approx=(HA01_matlab_solution_f(x0+h)-fx0)/h; error=approx-dfx0;
fprintf('h=%8.1E: Näherung für Ableitung:%14.10f, Fehler:%12.3E\n',
        h,approx,error)
h=1.0E-011: Näherung für Ableitung: -3.8204883701, Fehler: -2.178E-005

h=linspace(0,1e-6,1000);
err=abs((HA01_matlab_solution_f(x0+h) - fx0)./h - dfx0);
figure;
plot(h,err);
xlabel('h'); ylabel('Fehler'); grid on;
title('Approximationsfehler in Abhängigkeit von h');
print -depsc HA01_matlab_plot_3.eps

diary off

```



Bei der Darstellung handelt es näherungsweise um eine Gerade durch den Koordinatenursprung mit dem Anstieg 0.25, der Betrag des Fehlers verhält sich also wie $0.25h$. Für sehr kleine h reicht die vom Programm verwendete Rechengenauigkeit nicht zur Darstellung des linearen Zusammenhangs.

(Nach dem Satz von Taylor gilt $f(x_0+h) \approx f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2$ und daher

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}h.$$

Wegen $f''(1.85) \approx -0.498$ ergibt sich für die näherungsweise Berechnung der ersten Ableitung an der Stelle $x_0 = 1.85$ mit dem Differenzenquotienten ein Fehler von

$$\frac{f(1.85+h) - f(1.85)}{h} - f'(1.85) \approx -0.249h.$$

Bezüglich des Betrages kommt dies in dem Bild sehr gut zum Ausdruck.

Der Effekt ist auch an den zuvor berechneten Näherungen und Fehlern für einzelne h zu sehen:

Exakter Wert der Ableitung: -3.8204665882

h=1.0E-001: Näherung für Ableitung: -3.7370246815, Fehler: 8.344E-002
 h=1.0E-003: Näherung für Ableitung: -3.8207056144, Fehler: -2.390E-004
 h=1.0E-005: Näherung für Ableitung: -3.8204690787, Fehler: -2.490E-006
 h=1.0E-007: Näherung für Ableitung: -3.8204666153, Fehler: -2.710E-008
 h=1.0E-009: Näherung für Ableitung: -3.8204669428, Fehler: -3.546E-007
 h=1.0E-011: Näherung für Ableitung: -3.8204883701, Fehler: -2.178E-005

Für die Werte ab 10^{-7} ist der lineare Zusammenhang durch die verwendete Rechengenauigkeit gestört, für $h=0.1$ noch nicht erreicht.)