

Höhere Mathematik I.2

Aufgabenkomplex 1: Funktionen, Interpolation, Ableitung

Letzter Abgabetermin: 21. April 2009

(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 41/615)

Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.2, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

1. Sei $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}} + 3$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen. Bestimmen Sie ihren Definitionsbereich, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!
2. Bestimmen Sie mittels Lagrange-Interpolation das Polynom vierten Grades, welches an der Stelle 0 den Wert 4, an den Stellen +1 und -1 den Wert 12 und an den Stellen +2 und -2 den Wert 24 annimmt!
3. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^7 + 4x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{bx^7 + 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$ in Abhängigkeit von den reellen Parametern a und b !
4. Berechnen Sie ohne Verwendung der l'Hospitalischen Regel die Grenzwerte
a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 9x + 20}$ und b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 5x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$!
5. Berechnen Sie die ersten Ableitungen folgender Funktionen:
a) $f(x) = (4x + 3 \cos^2 x)^5$, b) $f(x) = 6^x x^6 \sin x$, c) $f(x) = \ln \sqrt{e^x + x^4}$, d) $f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{4x^2+5}}$!
6. § 32a Absatz 1 des Einkommensteuergesetzes bestimmt den Einkommensteuertarif wie folgt:
Die tarifliche Einkommensteuer bemisst sich nach dem zu versteuernden Einkommen. Sie beträgt vorbehaltlich der §§32b, 32d, 34, 34a, 34b und 34c jeweils in Euro für zu versteuernde Einkommen
 1. bis 7.664 Euro (Grundfreibetrag): 0;
 2. von 7.665 Euro bis 12.739 Euro: $(883,74 * y + 1.500) * y$;
 3. von 12.740 Euro bis 52.151 Euro: $(228,74 * z + 2.397) * z + 989$;
 4. von 52.152 Euro bis 250.000 Euro: $0,42 * x - 7.914$;
 5. von 250.001 Euro an: $0,45 * x - 15.414$.

„y“ ist ein Zehntausendstel des 7.664 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „z“ ist ein Zehntausendstel des 12.739 Euro übersteigenden Teils des auf einen vollen Euro-Betrag abgerundeten zu versteuernden Einkommens. „x“ ist das auf einen vollen Euro-Betrag abgerundete zu versteuernde Einkommen. Der sich ergebende Steuerbetrag ist auf den nächsten vollen Euro-Betrag abzurunden.

Sei t das ungerundete zu versteuernde Einkommen (in Folgendem Einkommen) und $S(t)$ die tarifliche Einkommensteuer dafür jeweils in Euro.

 - a) Wie hoch muss das Einkommen mindestens sein, damit wenigstens 1 € Einkommensteuer entsteht?
 - b) Berechnen Sie $\lim_{t \rightarrow 12740-} S(t)$ und $\lim_{t \rightarrow 12740+} S(t)$!

- c) Stellen Sie die Funktion $S(t)$ in den oben mit 4. und 5. bezeichneten Bereichen mithilfe der Gaußklammer dar!
- d) Untersuchen Sie $S(t)$ an den Stellen $t = 250000$ und $t = 250001$ auf Stetigkeit!

Um differenzieren zu können, soll im Weiteren von den Rundungsvorschriften abgesehen werden.

- e) Ermitteln Sie den Grenzsteuersatz in Abhängigkeit vom Einkommen und stellen Sie diesen grafisch dar!
- f) Ermitteln Sie für ein Einkommen von 10000 € die zu entrichtende Steuer, ihren prozentualen Anteil am Einkommen, den Grenzsteuersatz sowie die Steuerverminderung, die durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € erreicht wird!
- g) Für welche Einkommen kann durch zusätzliche Werbungskosten von 100 € die tarifliche Einkommensteuer um ca. 15 €, ca. 30 €, ca 42 € bzw. ca. 45 € vermindert werden?

Zusatzaufgabe

Bei dieser Aufgabe können 10 Zusatzpunkte erworben werden, bei den Aufgaben 1 – 5 werden insgesamt 40 Punkte vergeben. Der Aufgabenkomplex ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht worden sind.

Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit MATLAB. Protokollieren Sie Ihr Vorgehen in einer diary-Datei und speichern Sie erstellte Plots ab.

1. Lösen Sie die Interpolationsaufgabe aus Aufgabe 2 dieser Hausaufgabe, indem Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten aufstellen und lösen (vgl. Übung 1, Aufgabe 3 und WS 2008/09, Hausaufgabe 4, MATLABaufgabe 2). Zeichnen Sie die gegebenen Punkte und das berechnete Interpolationspolynom in einen gemeinsamen Plot.
2. a) Erstellen Sie ein `m-File` für die Funktion $f(x) = \ln(x+1) \sin(x^2)$. Bestimmen Sie (analytisch) die Ableitung der Funktion und erstellen Sie für diese ein weiteres `m-File`.
Hinweis: Die Funktion `log` ist in MATLAB der natürliche Logarithmus.
 - b) Plotten Sie die Funktion f im Intervall $[-0.5, 5]$ und zeichnen Sie an den Stellen $x_1 = 1.4$ und $x_2 = 3.75$ die Tangente an den Graphen der Funktion ein.
3. Manchmal ist es zu aufwendig, für eine komplizierte Funktion eine analytische Ableitung anzugeben. In diesem Fall kann man die Ableitung $f'(x_0)$ an der Stelle x_0 durch den Differenzenquotienten

$$f'_{\text{approx}}(x_0; h) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

für einen geeigneten (kleinen) Wert von h annähern, denn die Ableitung ist ja der Grenzwert dieser Differenzenquotienten:

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Es soll untersucht werden, wie gut die Annäherung $f'_{\text{approx}}(x_0; h)$ in Abhängigkeit von h ist. Dafür soll die Funktion f aus Aufgabe 2 an der Stelle $x_0 = 1,85$ verwendet werden.

Berechnen Sie zunächst die exakte Ableitung $f'(x_0)$ und vergleichen Sie diese mit der Näherung $f'_{\text{approx}}(x_0; h)$ für $h = 0.1$, $h = 0.001$, $h = 10^{-5}$, $h = 10^{-7}$, $h = 10^{-9}$ und $h = 10^{-11}$, indem Sie jeweils die Differenz $f'_{\text{approx}}(x_0; h) - f'(x_0)$ angeben.

Zeichnen Sie nun den Fehler der Annäherung, d.h. $|f'_{\text{approx}}(x_0; h) - f'(x_0)|$ in Abhängigkeit von h im Intervall $(0, 10^{-6}]$. Was können Sie beobachten?

Öffnen Sie die erstellte `diary`-Datei (vorher mit `>> diary off` die Protokollierung abschließen) und entfernen Sie ggf. überflüssige Zeilen (z.B. Fehleingaben). Drucken Sie anschließend die bearbeitete `diary`-Datei und die angefertigten Plots und `m-Files` möglichst sparsam (d.h. nach Möglichkeit duplex, mehrere Seiten pro Blatt, kleine Schriftgröße) aus. Fügen Sie den Ausdruck Ihrer „restlichen“ Hausaufgabe an.

Hinweise zur MATLABaufgabe

m-Files

In MATLAB können Funktionen in extra Dateien (m-Files) ausgelagert werden. Als Beispiel könnte die Datei `quadriere.m` dienen. Sie besteht aus den zwei Zeilen

```
function y=quadriere(x)
y=x^2;
```

Für Funktionen haben m-Files eine spezielle Struktur. Zunächst wird in der ersten Zeile mit dem Schlüsselwort `function` festgelegt, dass es sich um eine Funktion handelt. Daran schließt sich der Name des Rückgabeparameters (hier `y`), der Funktionsname (hier `quadriere`) und die Eingabeargumente (hier `x`) an. In den folgenden Zeilen können nahezu beliebige MATLAB-Befehle stehen. Zurückgegeben wird der Wert, welcher nach Abarbeitung aller Befehle in der Variable `y` steht.

Aufrufen können Sie diese Funktion aus MATLAB mit

```
>> quadriere(4)
>> f=quadriere(5)
>> y=quadriere(6)
```

Um sich später Arbeit zu sparen, empfiehlt es sich, die erstellten m-Files zu „vektorisieren“. Dazu müsste man hier die zweite Zeile in

```
y=x.^2;
```

ändern. Jetzt kann der Funktion auch ein Vektor übergeben werden:

```
>> quadriere([1, 2, 3, 4, 5])
```