

Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

Zusammenfassung der 14. Vorlesung vom 16.07.2009

Lineare Fehlerrechnung:

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{Fehler im Ergebnis}} := f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}) \approx \underbrace{\text{grad } f(\vec{x})}_{\text{Fehler in } \vec{x}} \cdot \Delta\vec{x} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \Delta x_i.$$

- Fehler in \vec{x} (z.B. Messdaten) wird mit $\text{grad } f(x)$ skalar multipliziert
- $\text{grad } f(x)$ gibt die Empfindlichkeit von f bzgl. Störungen in \vec{x} an
- oft bekannte Toleranzen $|\Delta x_i|$

$$|\Delta f| \leq \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x}) \right| |\Delta x_i|,$$

Hesse-Matrix:

$$H(\vec{a}) = \nabla^2 f(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_m \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{a})}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}.$$

Satz 7.20 (Extremwerttest)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ besitze alle partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, und diese seien in der Umgebung von \vec{a} stetig. Sei $\text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}$ (**stationärer Punkt**).

- Wenn die Hesse-Matrix $H(\vec{a})$ nur positive Eigenwerte $\lambda_i > 0$ hat, dann ist \vec{a} ein lokales Minimum.
- Wenn die Hesse-Matrix $H(\vec{a})$ nur negative Eigenwerte $\lambda_i < 0$ hat, dann ist \vec{a} ein lokales Maximum.
- Wenn die Hesse-Matrix $H(\vec{a})$ sowohl positive als auch negative Eigenwerte $\lambda_i \ll 0$ hat, dann ist \vec{a} ein sogenannter **Sattelpunkt** (keine Extremstelle!).

In allen anderen Fällen ist auf diesem Weg keine Entscheidung möglich.