Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

(1.) Unterliegt eine Variable der Beschränkung $x_i \leq 0$ statt $x_i \geq 0$, so wird x_i durch $-x_i$ ersetzt. Unterliegt eine Variable der Beschränkung $x_i \geq d_i$ statt $x_i \geq 0$, so wird x_i durch $\widetilde{x}_i = x_i - d_i$ mit $\widetilde{x}_i \geq 0$ ersetzt.

(2.) Ist für eine Variable x_i keine Vorzeichenbeschränkung gestellt, so setzen wir

$$x_i = x_i^+ - x_i^- \quad \text{mit } x_i^+ \geq 0, \quad x_i^- \geq 0$$

und ersetzen x_i durch $x_i^+ - x_i^-$. (Die Zahl der Variablen erhöht sich um eins.)

Jetzt liegt für jede Variable eine Nicht-Negativitätsbeschränkung vor.

(3.) Jede unerwünschte Ungleichung wird mit Hilfe einer neuer Variablen (**Schlupfvariablen**) u_i zu einer Gleichung umgeformt:

$$\begin{aligned} & a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n \leq b_i \\ \rightsquigarrow \quad & a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n + u_i = b_i, \quad u_i \geq 0 \end{aligned}$$

und bei umgekehrtem Vorzeichen:

$$\begin{aligned} & a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n \geq b_i \\ \rightsquigarrow \quad & a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots + a_{in}\,x_n - u_i = b_i, \quad u_i \geq 0. \end{aligned}$$

Beachte: Es kommen wieder neue Variablen hinzu. Es gilt jedoch weiterhin: Alle Variablen unterliegen einer Nicht-Negativitätsbeschränkung. Alle weiteren Bedingungen sind Gleichungen.

(4.) Falls in einer oder mehreren Gleichungen $b_i < 0$ gilt, so werden diese mit (-1) multipliziert.

(5.) Liegt ein Minimierungsproblem vor, so wird stattdessen die negative Zielfunktion maximiert:

$$\text{Minimiere} \quad \vec{c}^\top \vec{x} \quad \rightsquigarrow \quad \text{Maximiere} \quad -\vec{c}^\top \vec{x}.$$

Additive Konstanten in der Zielfunktion können ignoriert werden.

Beachte: Nach Lösung der Aufgabe müssen diese Transformationen rückgängig gemacht werden, um die Lösung interpretieren zu können.

Beispiel 6.7 **(Transformation in Normalform)**
Wir transformieren die Aufgabe

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & -x_1 + x_2 - x_3 - 2\,x_4 & \\ \text{sodass} & 3\,x_1 + x_2 - 3\,x_3 - x_4 & \le -12 \\ & 2\,x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ \text{und} & x_1 \ge 0, \quad x_3 \ge 2, \quad x_4 \le 5 & \end{array}$$

in Normalform. Wir ersetzen in Schritten (1.) und (2.)

$$\begin{array}{lllll} x_4 & \rightsquigarrow & \widetilde{x}_4 = 5 - x_4 & \Rightarrow & \widetilde{x}_4 \ge 0 \\ x_3 & \rightsquigarrow & \widetilde{x}_3 = x_3 - 2 & \Rightarrow & \widetilde{x}_3 \ge 0 \\ x_2 & \rightsquigarrow & x_2 = x_2^+ - x_2^- & \Rightarrow & x_2^+ \ge 0, \quad x_2^- \ge 0 \end{array}$$

Die neuen Variablen sind $x_1, x_2^+, x_2^-, \widetilde{x}_3, \widetilde{x}_4$. Wir ersetzen in der Zielfunktion und den restlichen Beschränkungen die alten durch die neuen Variablen:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & -x_1 + (x_2^+ - x_2^-) - (\widetilde{x}_3 + 2) - 2\,(5 - \widetilde{x}_4) & \\ \text{sodass} & 3\,x_1 + (x_2^+ - x_2^-) - 3\,(\widetilde{x}_3 + 2) - (5 - \widetilde{x}_4) & \le -12 \\ & 2\,x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + (\widetilde{x}_3 + 2) & = 2 \\ \text{und} & x_1 \ge 0, \quad x_2^+ \ge 0, \quad x_2^- \ge 0, \quad \widetilde{x}_3 \ge 0, \quad \widetilde{x}_4 \ge 0 & \end{array}$$

Durch Vereinfachen:

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & -x_1 + x_2^+ - x_2^- - \widetilde{x}_3 + 2\,\widetilde{x}_4 - 12 & \\ \text{sodass} & 3\,x_1 + x_2^+ - x_2^- - 3\,\widetilde{x}_3 + \widetilde{x}_4 & \le -1 \\ & 2\,x_1 + x_2^+ - x_2^- + \widetilde{x}_3 & = 0 \\ \text{und} & x_1 \ge 0, \quad x_2^+ \ge 0, \quad x_2^- \ge 0, \quad \widetilde{x}_3 \ge 0, \quad \widetilde{x}_4 \ge 0 & \end{array}$$

In Schritt (3.) führen wir eine Schlupfvariable u_1 ein und erhalten

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiere} & -x_1 + x_2^+ - x_2^- - \widetilde{x}_3 + 2\,\widetilde{x}_4 - 12 & \\ \text{sodass} & 3\,x_1 + x_2^+ - x_2^- - 3\,\widetilde{x}_3 + \widetilde{x}_4 + u_1 & = -1 \\ & 2\,x_1 + x_2^+ - x_2^- + \widetilde{x}_3 & = 0 \\ \text{und} & x_1 \ge 0, \quad x_2^+ \ge 0, \quad x_2^- \ge 0, \quad \widetilde{x}_3 \ge 0, \quad \widetilde{x}_4 \ge 0, \quad u_1 \ge 0 & \end{array}$$

In Schritt (4.) multiplizieren wir die erste Gleichung mit (-1), um eine nicht-negative rechte Seite zu erhalten:

$$\begin{array}{rl}
\text{Minimiere} & -x_1 + x_2^+ - x_2^- - \widetilde{x}_3 + 2\,\widetilde{x}_4 - 12 \\
\text{sodass} & \begin{array}{ll} -3\,x_1 - x_2^+ + x_2^- + 3\,\widetilde{x}_3 - \widetilde{x}_4 - u_1 & = 1 \\ 2\,x_1 + x_2^+ - x_2^- + \widetilde{x}_3 & = 0 \end{array} \\
\text{und} & x_1 \ge 0, \quad x_2^+ \ge 0, \quad x_2^- \ge 0, \quad \widetilde{x}_3 \ge 0, \quad \widetilde{x}_4 \ge 0, \quad u_1 \ge 0
\end{array}$$

Schließlich wird in Schritt (5.) die Zielfunktion auf Maximierung umgeschrieben:

$$\begin{array}{rl}
\text{Maximiere} & x_1 - x_2^+ + x_2^- + \widetilde{x}_3 - 2\,\widetilde{x}_4 + 12 \\
\text{sodass} & \begin{array}{ll} -3\,x_1 - x_2^+ + x_2^- + 3\,\widetilde{x}_3 - \widetilde{x}_4 - u_1 & = 1 \\ 2\,x_1 + x_2^+ - x_2^- + \widetilde{x}_3 & = 0 \end{array} \\
\text{und} & x_1 \ge 0, \quad x_2^+ \ge 0, \quad x_2^- \ge 0, \quad \widetilde{x}_3 \ge 0, \quad \widetilde{x}_4 \ge 0, \quad u_1 \ge 0
\end{array}$$

oder in Kurzform

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und } \vec{c} = (1, -1, 1, 1, -2, 0)^\top.$$

Die Konstante 12 in der Zielfunktion können wir ignorieren. Die Lösung (z.B. mit dem Simplex-Verfahren, siehe § 6.4) ist

$$(1, 0, 4, 2, 0, 6)^\top$$

oder in ursprünglichen Variablen

$$x_1^* = 1, \quad x_2^* = x_2^+ - x_2^- = -4, \quad x_3^* = \widetilde{x}_3 + 2 = 4, \quad x_4^* = 5 - \widetilde{x}_4 = 5.$$

Die Schlupfvariable $u_1 = 6$ sagt uns, dass in der ursprünglichen Ungleichungsbeschränkung

$$\underbrace{3\,x_1^* + x_2^* - 3\,x_3^* - x_4^*}_{=-18} \le -12$$

noch 6 Einheiten „Luft ist". (Wichtige Information in wirtschaftswissenschaftlichen Aufgabenstellungen.)
Der optimale Wert der Zielfunktion ist

$$-x_1^* + x_2^* - x_3^* - 2\,x_4^* = -1 - 4 - 4 - 10 = -19.$$