Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

Wir nehmen an, dass die LOA bereits in **Normalform** vorliegt:

$$\text{Maximiere} \quad \vec{c}^\top \vec{x}, \quad \text{wobei} \quad A\,\vec{x} = \vec{b} \quad \text{sowie} \quad \vec{x} \geq \vec{0}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Neben $\vec{b} \geq \vec{0}$ nehmen wir noch an, dass $m \leq n$ gilt (weniger Gleichungen als Variable) und dass A keine linear abhängigen (überflüssigen/widersprüchlichen) Zeilen enthält, also $\text{Rang}(A) = m$ ist.

Beispiel 6.12

In unserem Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 33 \\ 29 \\ 21 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = (3, 2, -3, -4, -1)^\top.$$

Wir wählen also ein Simplextableau für $n = 5$ Variablen und $m = 3$ Gleichungen.

Vorbereitung des Simplextableaus

(1.) Trage in die erste Zeile die **Namen der Variablen** (z.B. $x_1, x_2, \ldots, x_n$) ein und darunter die **Koeffizienten der Zielfunktion** ($c_1, c_2, \ldots, c_n$).

	Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$ $\quad c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1								
2								
3								
	$\Delta \rightarrow$							$\leftarrow z$

(2.) Trage darunter die Matrix A und rechts davon die rechte Seite $\vec{b}$ in das Tableau ein.

	Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$ $\quad c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1		8	-3	1	1	0	33		
2		3	2	0	1	1	29		$\uparrow +$
3		1	4	0	0	1	21		$\cdot(-1)$
	$\Delta \rightarrow$							$\leftarrow z$	

(3.) Forme das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ wie beim Gauß-Verfahren so um, dass einige Spalten zusammen die **Einheitsmatrix** $E \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ergeben. Diese Spalten in der richtigen Reihenfolge bilden die **Basis** B. Im Beispiel bietet sich $B = \{3, 4, 5\}$ an, da die zugehörigen Spalten von A schon nahe an der Einheitsmatrix sind.

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1			8	-3	1	1	0	33		$\uparrow +$
2			2	-2	0	1	0	8		$\cdot(-1)$
3			1	4	0	0	1	21		
		$\Delta \rightarrow$							$\leftarrow z$	

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1			6	-1	1	0	0	25	
2			2	-2	0	1	0	8	
3			1	4	0	0	1	21	
		$\Delta \rightarrow$							$\leftarrow z$

Achtung: Hier muss kontrolliert werden, dass alle Einträge in der Spalte x_B wirklich ≥ 0 sind! Ansonsten wäre der Basisvektor nicht zulässig, und wir müssten es entweder mit einer anderen Basis B versuchen oder (systematischer) die sogenannte Phase I vorschalten.

(4.) Schreibe die **Namen der Basisvariablen** in die Spalte B und daneben die **zugehörigen Koeffizienten** c_B der Zielfunktion.

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1	x_3	-3	6	-1	1	0	0	25	
2	x_4	-4	2	-2	0	1	0	8	
3	x_5	-1	1	4	0	0	1	21	
		$\Delta \rightarrow$							$\leftarrow z$

(5.) Berechne die **Optimalitätsindikatoren** $\Delta_k := \sum_{j \in B} c_j \, \widetilde{a}_{jk} - c_k$ und trage sie in die mit Δ bezeichnete Zeile ein.

	Var. $\rightarrow$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1	x_3	-3	6	-1	1	0	0	25	
2	x_4	-4	2	-2	0	1	0	8	
3	x_5	-1	1	4	0	0	1	21	
		$\Delta \rightarrow$	-30	5	0	0	0		$\leftarrow z$

Kontrolle: Bei den Basisvariablen muss $\Delta_k = 0$ stehen.

(6.) Berechne die **Zielfunktion** $z = \sum_{j \in B} c_j \, x_j$ und trage den Wert in die mit z bezeichnete Zelle ein. Das Simplextableau ist nun für den ersten Simplexschritt vorbereitet.

	Var. $\rightarrow$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1	x_3	-3	6	-1	1	0	0	25	
2	x_4	-4	2	-2	0	1	0	8	
3	x_5	-1	1	4	0	0	1	21	
		$\Delta \rightarrow$	-30	5	0	0	0	-128	$\leftarrow z$

Durchführung eines Simplexschrittes

(7.) Führe den **Optimalitätstest** durch: Sind alle $\Delta_k \geq 0$?

- Wenn ja, dann ist das aktuelle $\vec{x}_B$ mit $\vec{x}_N = \vec{0}$ eine optimale Lösung der LOA. **ENDE**
- Wenn nein, dann wähle (eine Spalte) k mit $\Delta_k < 0$. Im Beispiel kommt nur $\boxed{k = 1}$ in Frage.

(8.) Führe den **Quotiententest** durch: Berechne dazu

$$Q_j = \frac{\widetilde{b}_j}{\widetilde{a}_{jk}} \quad \text{für diejenigen } j \in B \text{ mit positiven Matrixeinträgen } \widetilde{a}_{jk} > 0.$$

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1	x_3	-3	6	-1	1	0	0	25	25/6
2	x_4	-4	2	-2	0	1	0	8	4
3	x_5	-1	1	4	0	0	1	21	21
		$\Delta \rightarrow$	-30	5	0	0	0	-128	$\leftarrow z$

- Wenn in der gewählten Spalte k alle $\widetilde{a}_{jk} \leq 0$ sind, ist die LOA unbeschränkt und damit nicht lösbar. **ENDE**
- Ansonsten merke den Index $r \in B$, bei dem Q_j am kleinsten ist. Im Beispiel: $\boxed{r = 4}$, da der kleinste Quotient in der zu x_4 gehörenden Zeile auftritt.

(9.) Bereite das Tableau für den nächsten Schritt vor. Die bisherige Basisvariable x_k wird durch x_r ersetzt (Spalte B). Der daneben stehende Koeffizient aus der Zielfunktion c_B wird ebenfalls ersetzt. Im Beispiel ist $B = \{3, 1, 5\}$ die neue Basis. Die Spalte Q wird gelöscht.

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1	x_3	-3	6	-1	1	0	0	25		
2	x_1	3	2	-2	0	1	0	8		$\cdot\frac{1}{2}$
3	x_5	-1	1	4	0	0	1	21		
		$\Delta \rightarrow$	-30	5	0	0	0	-128	$\leftarrow z$	

(10.) Die Matrix und rechte Seite müssen wie im Vorbereitungsschritt (3.) auf die richtige Form gebracht werden, und zwar passend zur neuen Basis. Im Beispiel: $B = \{3, 1, 5\}$.

- Die 3. Spalte der Matrix muss $(1, 0, 0)^\top$ sein (stimmt noch).
- Die 1. Spalte der Matrix muss $(0, 1, 0)^\top$ werden.
- Die 5. Spalte der Matrix muss $(0, 0, 1)^\top$ sein (stimmt noch).

Beachte: Es gibt immer nur eine Spalte, die nicht stimmt, nämlich die zum Index $\boxed{k}$ der neuen Basisvariablen, im Beispiel: $k = 1$.

Zunächst bringen wir eine 1 auf die entsprechende Zeile und erzeugen anschließend darüber und darunter Nullen:

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1	x_3	-3	6	-1	1	0	0	25		$\uparrow +$
2	x_1	3	1	-1	0	1/2	0	4		$\cdot(-6)$
3	x_5	-1	1	4	0	0	1	21		
		$\Delta \rightarrow$	-30	5	0	0	0	-128	$\leftarrow z$	

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1	x_3	-3	0	5	1	-3	0	1		
2	x_1	3	1	-1	0	1/2	0	4		$\cdot(-1)$
3	x_5	-1	1	4	0	0	1	21		$\downarrow +$
		$\Delta \rightarrow$	-30	5	0	0	0	-128	$\leftarrow z$	

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1	x_3	-3	0	5	1	-3	0	1	
2	x_1	3	1	-1	0	1/2	0	4	
3	x_5	-1	0	5	0	$-1/2$	1	17	
		$\Delta \rightarrow$	-30	5	0	0	0	-128	$\leftarrow z$

Kontrolle: Die Basisvariablen (Spalte x_B) dürfen keine negativen Werte annehmen.

(11.) Abschließend müssen wir noch die Optimalitätsindikatoren Δ und den Wert der Zielfunktion z aktualisieren. Dazu können wir diese entweder wie bei den Vorbereitungsschritten (5.) und (6.) neu berechnen, oder wir können die Δ-Zeile wie eine zusätzliche Zeile der Matrix behandeln und eine Null in Spalte $k = 1$ erzeugen:

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B\downarrow$	$c_B\downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B\downarrow$	$Q\downarrow$	
1	x_3	-3	0	5	1	-3	0	1		
2	x_1	3	1	-1	0	$1/2$	0	4		$\cdot(30)$
3	x_5	-1	0	5	0	$-1/2$	1	17		
		$\Delta\rightarrow$	-30	5	0	0	0	-128	$\leftarrow z$	$\downarrow +$

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B\downarrow$	$c_B\downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B\downarrow$	$Q\downarrow$
1	x_3	-3	0	5	1	-3	0	1	
2	x_1	3	1	-1	0	$1/2$	0	4	
3	x_5	-1	0	5	0	$-1/2$	1	17	
		$\Delta\rightarrow$	0	-25	0	15	0	-8	$\leftarrow z$

Kontrolle: Bei den Basisvariablen muss wieder $\Delta_k = 0$ stehen.

Kontrolle: Der neue Wert der Zielfunktion (hier $z = -8$) darf nicht kleiner sein als der alte Wert ($z = -128$).

Durchführung des nächsten Simplexschrittes

(7'.) Beim **Optimalitätstest** sind wieder nicht alle $\Delta_k \geq 0$. Wir müssen einen weiteren Simplexschritt durchführen. Wieder kommt nur eine Spalte $\boxed{k = 2}$ in Frage.

(8'.) Für den **Quotiententest** berechnen wir wieder

$$Q_j = \frac{\widetilde{b}_j}{\widetilde{a}_{jk}} \quad \text{für diejenigen } j \in B \text{ mit positiven Matrixeinträgen } \widetilde{a}_{jk} > 0.$$

		Var. $\to$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1	x_3	-3	0	5	1	-3	0	1	$1/5$
2	x_1	3	1	-1	0	$1/2$	0	4	—
3	x_5	-1	0	5	0	$-1/2$	1	17	$17/5$
		$\Delta \to$	0	-25	0	15	0	-8	$\leftarrow z$

Der kleinste Quotient tritt in der Zeile mit x_3 auf, also setzen wir $\boxed{r = 3}$.

(9'.) Die bisherige Basisvariable x_k wird durch x_r ersetzt (Spalte B). Der daneben stehende Koeffizient aus der Zielfunktion c_B wird ebenfalls ersetzt. Die Spalte Q wird gelöscht. Im Beispiel ist $B = \{2, 1, 5\}$ die neue Basis.

		Var. $\to$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1	x_2	2	0	5	1	-3	0	1		$\cdot\frac{1}{5}$
2	x_1	3	1	-1	0	$1/2$	0	4		
3	x_5	-1	0	5	0	$-1/2$	1	17		
		$\Delta \to$	0	-25	0	15	0	-8	$\leftarrow z$	

(10'.) Die Matrix und rechte Seite müssen wieder auf die richtige Form gebracht werden, passend zur neuen Basis $B = \{2, 1, 5\}$.

- Die 2. Spalte der Matrix muss $(1, 0, 0)^\top$ werden.
- Die 1. Spalte der Matrix muss $(0, 1, 0)^\top$ sein (stimmt noch).
- Die 5. Spalte der Matrix muss $(0, 0, 1)^\top$ sein (stimmt noch).

Zunächst bringen wir eine 1 auf die entsprechende Zeile und erzeugen anschließend darunter Nullen:

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1	x_2	2	0	1	1/5	$-3/5$	0	1/5		$\cdot (1)$
2	x_1	3	1	-1	0	1/2	0	4		$\downarrow +$
3	x_5	-1	0	5	0	$-1/2$	1	17		
		$\Delta \rightarrow$	0	-25	0	15	0	-8	$\leftarrow z$	

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1	x_2	2	0	1	1/5	$-3/5$	0	1/5		$\cdot (-5)$
2	x_1	3	1	0	1/5	$-1/10$	0	21/5		
3	x_5	-1	0	5	0	$-1/2$	1	17		$\downarrow +$
		$\Delta \rightarrow$	0	-25	0	15	0	-8	$\leftarrow z$	

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1	x_2	2	0	1	1/5	$-3/5$	0	1/5	
2	x_1	3	1	0	1/5	$-1/10$	0	21/5	
3	x_5	-1	0	0	-1	5/2	1	16	
		$\Delta \rightarrow$	0	-25	0	15	0	-8	$\leftarrow z$

Kontrolle: Die Basisvariablen (Spalte x_B) dürfen keine negativen Werte annehmen.

(11'.) Abschließend müssen wir noch die Optimalitätsindikatoren Δ und den Wert der Zielfunktion z aktualisieren.

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$	
1	x_2	2	0	1	$1/5$	$-3/5$	0	$1/5$		$\cdot (25)$
2	x_1	3	1	0	$1/5$	$-1/10$	0	$21/5$		
3	x_5	-1	0	0	-1	$5/2$	1	16		
		$\Delta \rightarrow$	0	-25	0	15	0	-8	$\leftarrow z$	$\downarrow +$

		Var. $\rightarrow$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
Nr.	$B \downarrow$	$c_B \downarrow$	3	2	-3	-4	-1	$x_B \downarrow$	$Q \downarrow$
1	x_2	2	0	1	$1/5$	$-3/5$	0	$1/5$	
2	x_1	3	1	0	$1/5$	$-1/10$	0	$21/5$	
3	x_5	-1	0	0	-1	$5/2$	1	16	
		$\Delta \rightarrow$	0	0	5	0	0	-3	$\leftarrow z$

Kontrolle: Bei den Basisvariablen muss wieder $\Delta_k = 0$ stehen.

Kontrolle: Der neue Wert der Zielfunktion (hier $z = -3$) darf nicht kleiner sein als der alte Wert ($z = -8$).

(7".) Diese Mal sind beim **Optimalitätstest** alle $\Delta_k \geq 0$!

Der aktuelle Vektor $\vec{x}_B$ mit $\vec{x}_N = \vec{0}$ ist eine optimale Lösung der LOA, also

$$\vec{x}^* = \begin{pmatrix} 21/5 \\ 1/5 \\ 0 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Der optimale Wert der Zielfunktion ist $z^* = -3$.

Beachte: Falls die ursprüngliche Aufgabe erst in Normalform gebracht werden musste, müssen wir die Lösung noch zurücktransformieren. Zum Beispiel werden Variablen ohne Vorzeichenbeschränkung wieder als $x_i = x_i^+ - x_i^-$ zusammengefasst, Schlupfvariablen gestrichen etc. Im Beispiel ist das aber nicht notwendig, da die Aufgabe schon in Normalform gestellt war.