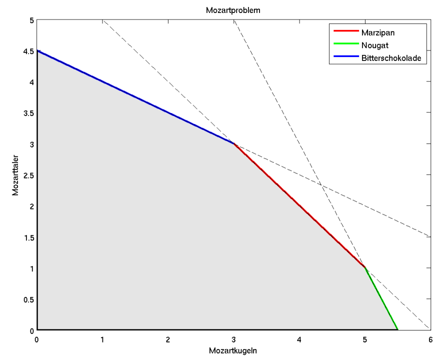
Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

Beispiel 6.3 **(Mozartproblem)**

(1.) Darstellung der zulässigen Menge

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 6 && \text{Marzipan} \\ 2\,x_1 + x_2 &\leq 11 && \text{Nougat} \\ x_1 + 2\,x_2 &\leq 9 && \text{Bitterschokolade} \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

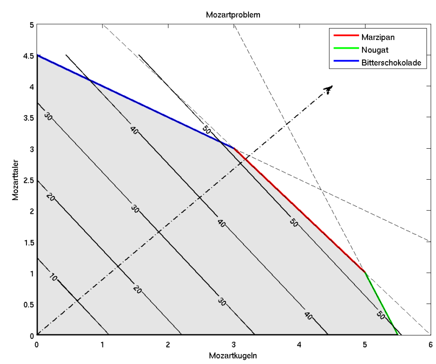


(2.) Darstellung einiger Höhenlinien der Zielfunktion

Die Zielfunktion ist $9\,x_1 + 8\,x_2$, also ist

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

der Kostenvektor der Aufgabe. Die Höhenlinien der Zielfunktion verlaufen senkrecht zu $\vec{c}$. Die Funktion steigt in Richtung von $\vec{c}$ und fällt in Richtung von $-\vec{c}$.



(3.) Verschiebe die Höhenlinien soweit wie möglich in Maximierungsrichtung $\vec{c}$ bzw. Minimierungsrichtung $-\vec{c}$, sodass sie den zulässigen Bereich gerade noch schneidet.

(4.) Bestimmung der Lösung

(a) Die Lösung liegt in einer Ecke des zulässigen Bereiches: Lies die Koordinaten aus der Zeichnung ab, oder bestimme sie als Schnittpunkt zweier Geraden.
Im Beispiel: $\vec{x}^* = (5, 1)^\top$ ablesen oder als Schnittpunkt der Geraden $2\,x_1 + x_2 = 11$ und $x_1 + x_2 = 6$ bestimmen (LGS).

(b) Die Lösung ist eine ganze Kante des zulässigen Bereiches: Gib die Geradengleichung der Kante und die Endpunkte an.

Setze die gefundene Lösung in die Zielfunktion ein, um den Maximalwert bzw. Minimalwert zu ermitteln. Im Beispiel: $9 \cdot 5 + 8 \cdot 1 = 53$.

Lösung: Der maximale Umsatz von 53 ergibt sich bei Produktion von $x_1^* = 5$ Einheiten an Mozartkugeln und $x_2^* = 1$ Einheit an Mozarttalern.