Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

Beispiel 5.19 (Mathematisches Pendel mit periodischer Anregung)
Wir kommen zurück zum Dgl-System des mathematischen Pendels, siehe Beispiel 5.18. Wir geben zusätzlich eine harmonische Anregung einer Form einer Kraft vor, die periodisch auf das Pendel wirkt:

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 50\,\sin(2\,\omega_0\,x) \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten das inhomogene Dgl-System

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50\,\sin(2\,\omega_0\,x) \end{pmatrix}$$

mit der Abkürzung $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Zur Bestimmung einer partikulären Lösung machen wir den Ansatz vom Typ der rechten Seite.
Beachte: Obwohl in $\vec{f}(x)$ nur sin-Terme vorkommen, müssen wir trotzdem im Ansatz sin- und cos-Terme vorsehen:

$$\begin{aligned} & \vec{y}_p(x) = \vec{c}_1\,\sin(2\,\omega_0\,x) + \vec{c}_2\cos(2\,\omega_0\,x) \\ \Rightarrow\quad & \vec{y}_p'(x) = 2\,\omega_0\,\vec{c}_1\,\cos(2\,\omega_0\,x) - 2\,\omega_0\,\vec{c}_2\,\sin(2\,\omega_0\,x) \end{aligned}$$

mit Unbekannten $\vec{c}_1 = (c_{11}, c_{12})^\top$ und $\vec{c}_2 = (c_{21}, c_{22})^\top$. Zum späteren Einsetzen in die Dgl $\vec{y}_p'(x) = A\,\vec{y}_p(x) + \vec{f}(x)$ berechnen wir auch

$$\begin{aligned} & A\,\vec{y}_p(x) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \left[\vec{c}_1\,\sin(2\,\omega_0\,x) + \vec{c}_2\,\cos(2\,\omega_0\,x)\right] \\ &= \begin{pmatrix} 0\cdot c_{11}\sin(2\,\omega_0\,x) + 1\cdot c_{12}\sin(2\,\omega_0\,x) + 0\cdot c_{21}\cos(2\,\omega_0\,x) + 1\cdot c_{22}\cos(2\,\omega_0\,x) \\ -\omega_0^2\cdot c_{11}\sin(2\,\omega_0\,x) + 0\cdot c_{12}\sin(2\,\omega_0\,x) - \omega_0^2\cdot c_{21}\cos(2\,\omega_0\,x) + 0\cdot c_{22}\cos(2\,\omega_0\,x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}\sin(2\,\omega_0\,x) + c_{22}\cos(2\,\omega_0\,x) \\ -\omega_0^2\cdot c_{11}\sin(2\,\omega_0\,x) - \omega_0^2\cdot c_{21}\cos(2\,\omega_0\,x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich in $\vec{y}_p'(x) = A\,\vec{y}_p(x) + \vec{f}(x)$ ergibt das LGS

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2\,\omega_0 & 0 \\ 2\,\omega_0 & 0 & 0 & -1 \\ \omega_0^2 & 0 & 0 & -2\,\omega_0 \\ 0 & 2\,\omega_0 & \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{21} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung

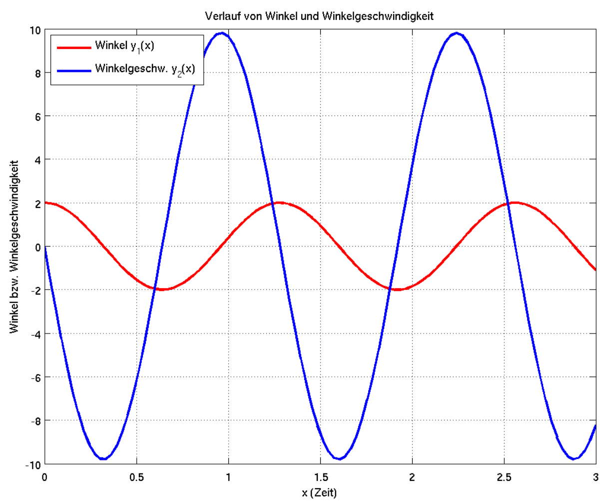
$$\vec{c}_1 = \left(\frac{-50}{3\,\omega_0^2}, 0\right)^\top, \quad \vec{c}_2 = \left(0, \frac{-100}{3\,\omega_0}\right)^\top.$$

Zusammen mit der allgemeinen Lösung des *homogenen* Systems (siehe Beispiel 5.18) bekommen wir

$$\vec{y}(x) = \tilde{c}_1 \begin{pmatrix} \sin(\omega_0\, x) \\ \omega_0 \cos(\omega_0\, x) \end{pmatrix} + \tilde{c}_2 \begin{pmatrix} -\cos(\omega_0\, x) \\ \omega_0 \sin(\omega_0\, x) \end{pmatrix} - \frac{50}{3\,\omega_0^2} \begin{pmatrix} \sin(2\,\omega_0\, x) \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{100}{3\,\omega_0} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2\,\omega_0\, x) \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$. Durch Vorgabe einer AB $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ wird diese Lösung wieder eindeutig.

Beachte: Im Beispiel haben wir eine periodische Anregung $\vec{f}(x)$ mit Kreisfrequenz $2\,\omega_0$ gewählt. Bei Anregungen mit Frequenzen nahe der Eigenfrequenz ω_0 kommt es zur **Resonanzkatastrophe**.



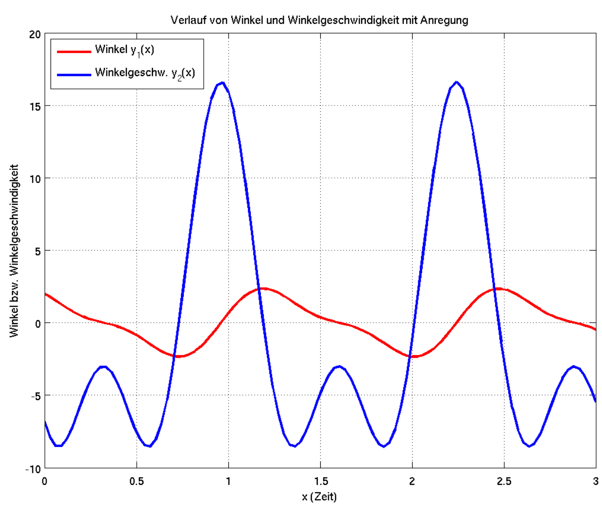


Abbildung 1: Zum Vergleich: Lösung der homogenen Gleichung (links) und Lösung der inhomogenen Gleichung mit Anregung $\vec{f}(x)$ wie oben (rechts).