Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

Beispiel 5.18 **(Mathematisches Pendel)**
Wir betrachten die Dgl des mathematischen Pendels:

$$\varphi''(x) = -\frac{g}{L}\,\varphi(x)$$

wobei

$\varphi(x)$	Ausschlagswinkel zur Zeit x
g	Gravitationskonstante
L	Pendellänge

bezeichnen. Wir formen diese Dgl zweiter Ordnung in ein System mit zwei Dgl erster Ordnung um und setzen:

$$\begin{array}{lll} y_1(x) = \varphi(x) & \text{Winkel} & \Rightarrow \quad y_1'(x) = \varphi'(x) = y_2(x) \\ y_2(x) = \varphi'(x) & \text{Winkelgeschwindigkeit} & \Rightarrow \quad y_2'(x) = \varphi''(x) = -\dfrac{g}{L} y_1(x). \end{array}$$

Dann ergibt sich das Dgl-System in gewohnter Form

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\det(A - \lambda\, E) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -g/L & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{g}{L}.$$

Die beiden Eigenwerte der Matrix sind also $\lambda_{1,2} = \pm i\,\sqrt{g/L} \in \mathbb{C}$. Wir setzen zur Abkürzung $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Damit können wir die komplexen Eigenvektoren berechnen:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i\omega_0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & -i\omega_0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{hat die allgemeine Lösung} \quad \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} -i \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i\omega_0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & i\omega_0 & 0 \end{array}\right) \quad \text{hat die allgemeine Lösung} \quad \vec{x} = \alpha \begin{pmatrix} i \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

jeweils mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach Satz 5.16 besteht die allgemeine Lösung des Dgl-Systems aus

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &= c_1\, e^{i\,\omega_0\,x} \begin{pmatrix} -i \\ \omega_0 \end{pmatrix} + c_2\, e^{-i\,\omega_0\,x} \begin{pmatrix} i \\ \omega_0 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \Big(\cos(\omega_0\, x) + i\, \sin(\omega_0\, x) \Big) \begin{pmatrix} -i \\ \omega_0 \end{pmatrix} + c_2 \Big(\cos(-\omega_0\, x) + i\, \sin(-\omega_0\, x) \Big) \begin{pmatrix} i \\ \omega_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, vgl. Eulersche Formel (§ 1.4.2).
Frage: Diese komplexwertigen Lösungen für $y_1(x)$ (Winkel) und $y_2(x)$ (Winkelgeschwindigkeit) sind für uns nicht sinnvoll. Wie erhalten wir reellwertige Lösungen?
Wir nehmen dazu *eine* der beiden Lösungen (die zu einem Paar komplex-konjugierter Eigenwerte gehören), bilden die Real- und Imaginärteile und versehen diese mit neuen Konstanten $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$:

$$\mathrm{Re}\Big(\cos(\omega_0\, x) + i\,\sin(\omega_0\, x)\Big)\begin{pmatrix}-i\\ \omega_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(\omega_0\, x)\\ \omega_0\cos(\omega_0\, x)\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Im}\Big(\cos(\omega_0\, x) + i\,\sin(\omega_0\, x)\Big)\begin{pmatrix}-i\\ \omega_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos(\omega_0\, x)\\ \omega_0\sin(\omega_0\, x)\end{pmatrix}.$$

Dies führt auf die endgültige (reellwertige) allgemeine Lösung

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \varphi'(x)\end{pmatrix} = \tilde{c}_1\begin{pmatrix}-\sin(\omega_0\, x)\\ \omega_0\cos(\omega_0\, x)\end{pmatrix} + \tilde{c}_2\begin{pmatrix}-\cos(\omega_0\, x)\\ \omega_0\sin(\omega_0\, x)\end{pmatrix}$$

mit $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$. Die Lösungen entsprechen periodischen Schwingungsbewegungen.
Die Zahl $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ heißt die **Eigen-Kreisfrequenz** des Pendels (Einheit: 1/s).
Die **Periodendauer** beträgt $2\,\pi/\omega_0$.
Durch Einsetzen der AB $\vec{y}(0) = (2, 0)^\top$ ergibt sich das LGS

$$\vec{y}(0) = \tilde{c}_1\begin{pmatrix}0\\ \omega_0\end{pmatrix} + \tilde{c}_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$$

mit der eindeutigen Lösung $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = (0, -2)$, also

$$\vec{y}(x) = -2\begin{pmatrix}-\cos(\omega_0\, x)\\ \omega_0\sin(\omega_0\, x)\end{pmatrix}.$$