Höhere Mathematik für Bachelorstudiengänge I.2

Beispiel 5.1 (Exponentielles und logistisches Wachstum)
In diesem Beispiel bezeichnet x die unabhängige Variable (Zeit) und $y(x)$ die zur Zeit x vorhandene Menge einer Bakterienpopulation.

(a) In einem einfachen Modell wird angenommen, dass die Wachstumsrate $y'(x)$ proportional zur bereits vorhandenen Bakterienanzahl (aufgrund von Zellteilung) ist:

$$y'(x) = a\,y(x).$$

Man rechnet leicht nach, dass die Funktion

$$y(x) = c\,\exp(ax)$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Dgl ist. Allerdings ist $y(x)$ für $c \neq 0$ unbeschränkt für $x \to \infty$, sodass das Dgl-Modell nur bedingt sinnvoll ist.

Die Dgl können wir auch so lesen: Die Steigung $y'(x)$ der (Tangente der) Lösung am Punkt $(x, y(x)) \in \mathbb{R}^2$ ist gleich $a\,y(x)$. Damit können wir in der (x, y)–Ebene ein Richtungsfeld zeichnen, hier $(1, a\,y)$, dem die Lösungen folgen.

(b) Wir verfeinern das Modell und nehmen an, dass die Wachstumsrate $y'(x)$ proportional zu $y(x)$ und zu $b - y(x)$ ist:

$$y'(x) = a\,y\,(b - y(x))$$

Damit sollte sich eine Sättigung bei $y(x) = b$ ergeben. Man rechnet wieder leicht nach, dass die Funktion

$$y(x) = \frac{b}{1 + c\,b\,e^{-abx}}$$

für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung dieser Dgl ist. Da dies eine logistische Funktion ist, vgl. Beispiel 4.3, sprechen wir von der Dgl des logistischen Wachstums.